

Versuch: Brückenschaltungen (14.5.2002)

Inhalt:

- | | | |
|----|----------------------------------------|---------|
| 1. | Einführung zum Versuch | Seite 1 |
| 2. | Messungen und Bearbeitung der Aufgaben | Seite 3 |

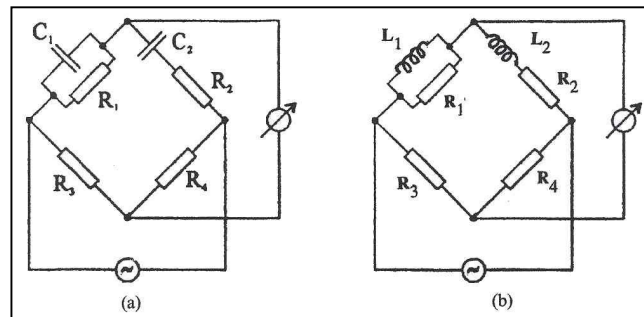
1. Einführung zum Versuch

1.1 Versuchsziel

Bei diesem Versuch sollen mit Hilfe geeigneter Brückenschaltungen (ohmsche) Gleichstrom- und Wechselstromwiderstände bestimmt werden. Während man zur Messung von Gleichstromwiderständen eine Schaltung aus vier ohmschen Widerständen (drei bekannte und der zu messende, siehe unten) verwendet (eine sog. Wheatstonebrücke), muss man für Wechselstromwiderstände ähnliche Schaltungen aus komplexen Widerständen einsetzen. Hierzu sind dann etwas kompliziertere Überlegungen zu den Abgleichbedingungen notwendig.

1.2 Aufgabe 1: Abgleichbedingungen für Wechselstrombrücken

Im folgenden sollen die Abgleichbedingungen für die rechts abgebildeten Wechselstrombrücken hergeleitet werden. Grundsätzlich betrachtet man dazu jeweils die i.a. komplexen Widerstände Z_1 bis Z_4 . Diese müssen dann im abgeglichenen Zustand die auch bei Gleichstrombrücken geltende Bedingung $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$ erfüllen, und zwar für Real- und Imaginärteil der Gleichung getrennt.



- **Schaltung (a):**

Mit den in der Anleitung gegebenen Beziehungen $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1$, $Z_2 = R_2 - \frac{i}{\omega C_2}$, $Z_3 = R_3$

sowie $Z_4 = R_4$ ergibt sich:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1\right)\left(R_2 - \frac{i}{\omega C_2}\right)} = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1} + i\omega C_1 R_2 - \frac{i}{\omega R_1 C_2} + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 C_1}{C_2} + i\omega C_1 R_2 R_3 - \frac{i R_3}{\omega R_1 C_2}$$

Realteil dieser Gleichung:

$$\underline{\underline{R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 C_1}{C_2} \Leftrightarrow \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}}}$$

Der Imaginärteil liefert:

$$\underline{\underline{\omega C_1 R_2 R_3 = \frac{R_3}{\omega R_1 C_2} \Leftrightarrow R_1 R_2 = \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}}$$

- **Schaltung (b):**

Gemäß Anleitung gilt: $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{i}{\omega L_1}$, $Z_2 = R_2 + i\omega L_2$, $Z_3 = R_3$ sowie $Z_4 = R_4$. Damit ergibt sich:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{i}{\omega L_1}\right)(R_2 + i\omega L_2)} = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1} - \frac{i R_2}{\omega L_1} + \frac{i\omega L_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1}} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 L_2}{L_1} - \frac{i R_2 R_3}{\omega L_1} + \frac{i\omega R_3 L_2}{R_1}$$

Aus dem Realteil ergibt sich die Bedingung:

$$\underline{\underline{R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 L_2}{L_1} \Leftrightarrow \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1}}}$$

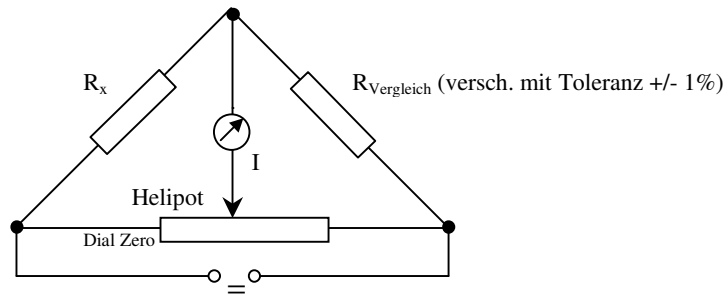
und aus dem Imaginärteil die Beziehung:

$$\underline{\underline{\frac{\omega R_3 L_2}{R_1} = \frac{R_2 R_3}{\omega L_1} \Leftrightarrow R_1 R_2 = \omega^2 L_1 L_2}}}$$

2. Messungen und zugehörige Aufgaben

2.1 Aufgabe 2a: Ohmscher Widerstand des Schiebewiderstandes

Bei den Messungen 2.1-2.4 wurde mit folgender Gleichspannungsbrücke gemessen (Eingangsspannung: siehe jeweilige Auswertung)



Der Abgleichvorgang ist bei der Gleichstrombrücke einfach: Das Helipot wird so verdreht, dass der Strom in der Brücke zu 0 sinkt. Für den gesuchten Widerstand R_x gilt dann:

$$R_x = \frac{A}{1000 - A} R_{\text{Vergleich}}$$

Zunächst sollte der Gesamtwiderstand der Widerstandsbahn des kleinen Potentiometers bestimmt werden. Die Versorgungsspannung war bei Messung 2.1 bei ca. 0,5 V, die Vergleichswiderstände lagen bei 10, 30 und 100Ω +/- 1%. Wir wollen bei dieser Messung zunächst die errechneten Widerstände mitteln und dann eine Toleranz für den gefundenen Mittelwert errechnen. Hierzu ist es wichtig zu wissen, dass neben den Vergleichswiderstands-Toleranzen auch noch die Linearitätstoleranz des Helipots (+/-0,1% vom eingestellten Wert) sowie die Ablesegenauigkeit am Helipot (+/-0,5 Skt) in die Berechnung des Gesamtfehlers eingehen. Mit diesen Angaben könnte natürlich ebenso gut eine Berechnung der Messfehler für die Einzelmessungen erfolgen, wie wir es bei 2.2 machen werden. Der gegebene Weg erscheint jedoch besonders elegant.

Nun zu den Messwerten, die hier in einer Tabelle zusammengefasst und auch schon gemittelt sind:

Versuch:	1.	2.	3.
Vergleichswiderstand/Ohm:	10	30	100
Ergebnis (A/Skt.):	909,5	770,0	502,0
jew. Linearitätstoleranz für A/Skt.:	0,9	0,8	0,5
errechneter Widerstand (Rx/Ohm):	100,5	100,4	100,8
Widerstandsmittelwert/Ohm:	100,6		

Nun errechnet sich ja der Mittelwert mit folgender Formel:

$$\bar{R}_x = \frac{A_1}{3 \cdot (1000 - A_1)} R_{\text{Vergleich},1} + \frac{A_2}{3 \cdot (1000 - A_2)} R_{\text{Vergleich},2} + \frac{A_3}{3 \cdot (1000 - A_3)} R_{\text{Vergleich},3}$$

Durch die Mittelwertbildung sind die Vergleichswiderstands-Fehler statistischer Natur, ebenso wie der Fehler für A , der sich aus einer linearen Addition des Ablesefehlers mit dem Linearitätsfehler ergibt. Wir wählen diese Methode zur Ermittlung des Fehlers für A , weil der Linearitätsfehler für eine Einzelmessung jeweils stets in eine Richtung geht und somit für diese einen syst. Fehler darstellt. Für die Durchschnittsbildung stört dies die Einstufung der A -/ R_v -Fehler als statistisch jedoch nicht, da der Linearitätsfehler bei verschiedenen A -Werten völlig schwanken kann. Der insgesamt Fehler für den Widerstandsdurchschnitt errechnet sich somit mittels quadratischer Fortpflanzung zu:

$$\Delta \bar{R}_x = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial R_{vgl,1}} \Delta R_{vgl,1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial R_{vgl,2}} \Delta R_{vgl,2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial R_{vgl,3}} \Delta R_{vgl,3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial A_1} \Delta A_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial A_2} \Delta A_2\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{R}_x}{\partial A_3} \Delta A_3\right)^2}$$

$$\Rightarrow (\Delta \bar{R}_x)^2 \approx \left(\frac{A_1}{3 \cdot (1000 - A_1)} \cdot 0,1\Omega\right)^2 + \left(\frac{A_2}{3 \cdot (1000 - A_2)} \cdot 0,3\Omega\right)^2 + \left(\frac{A_3}{3 \cdot (1000 - A_3)} \cdot 1,0\Omega\right)^2 +$$

$$+ \left(R_{vgl,1} \frac{1000 - A_1 + A_1}{3 \cdot (1000 - A_1)^2} \cdot 1,4\right)^2 + \left(R_{vgl,2} \frac{1000}{3 \cdot (1000 - A_2)^2} \cdot 1,3\right)^2 + \left(R_{vgl,3} \frac{1000}{3 \cdot (1000 - A_3)^2} \cdot 1,0\right)^2$$

Die Wurzel aus diesem Ausdruck lassen wir lieber von einer Tabellenkalkulation schrittweise ausrechnen:

Versuch:	1.	2.	3.
Vergleichswiderstand:	10	30	100
Ergebnis (A/Skt.):	909,5	770,0	502,0
1000-A/Skt.	90,5	230,0	498,0
Fehler für Vergleichswid./Ohm	0,1	0,3	1,0
Fehler für A/Skt.:	1,4	1,3	1,00
(A * Fehler/VWid / (1000-A))^2	1,01	1,01	1,02
(VWid * 1000 * FehlerA / (1000-A)^2)^2	2,92	0,54	0,16
Gesamter Fehler für Mw. von R:	0,85		

Der gemessene Widerstand ist also inkl. Toleranz mit vernünftigem impliziten Fehler:
101 Ω ± 1 Ω (genau: ± 0,85 Ω).

2.2 Aufgabe 2b: Ohmscher Widerstand einer Glühbirne I (U=3V)

Nun soll mit derselben Brücke der Widerstand einer Glühbirne bestimmt werden. Diese wird einfach anstatt des Schiebewiderstandes in die Schaltung eingesetzt. Es liegt eine Spannung von 3V an der Brücke an; die auftretenden Einzelfehler sind jeweils prinzipiell von selber Art und selbem prozentualen/absoluten Betrag wie unter 2.1. Auch hier werden wieder drei Messungen mit verschiedenen Vergleichswiderständen durchgeführt. Da jedoch, weil Glühbirnen bei unterschiedlichem Durchflussstrom unterschiedlichen Widerstand haben (siehe 2.3), hier eine Mittelung der erhaltenen Widerstandswerte Unsinn ist, wird lediglich der Einzelfehler für je eine Messung berechnet. Hierbei erhält man den Fehler für A mittels linearer Addition (siehe oben) und wendet eine lineare Fehlerfortpflanzung auf den Fehler für A sowie den Fehler für den Vergleichswiderstand an. Dies ist deshalb sinnvoll, weil außer dem Ablesefehler am Helipot alle Fehler für eine Messung systematischen Charakter haben (Abweichung in eine feste Richtung, dies gilt auch für die Linearitätstoleranz, die bei ungefähr festem A immer dieselbe ist).

Damit berechnet sich der Fehler zu:

$$\Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial A} \Delta A \right| + \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_v} \Delta R_v \right| = R_v \cdot \frac{1000 - A + A}{(1000 - A)^2} \cdot \Delta A + \frac{A}{1000 - A} \cdot \Delta R_v$$

Jetzt aber sind wir schon ganz gespannt auf die Messwerte und Toleranzen. Die Ergebnisse stehen in den letzten beiden Zeilen:

Versuch:	1.	2.	3.
Vergleichswiderstand/Ohm:	10,0	100	200
Fehler Vergleichswiderstand/Ohm:	0,1	1,0	2,0
Ergebnis (A/Skt.):	896,5	373,0	162,0
(1000-A)/Skt.	103,5	627,0	838,0
jew. Linearitätstoleranz für A/Skt.:	0,9	0,4	0,2
Gesamtfehler für A/Skt.:	1,4	0,9	0,7
errechneter Widerstand (Rx/Ohm):	86,6	59,5	38,7
Widerstandsfehler für Rx/Ohm:	2,17	0,82	0,58

2.3 Aufgabe 2c: Ohmscher Widerstand einer Glühlampe II

Bei dieser Messung sollte der ohmsche Widerstand einer Glühlampe bei verschiedenen Spannungen und damit Strömen durch die Glühlampe gemessen werden, und zwar mit zwei verschiedenen Vergleichswiderständen R_v . Wir haben folgende Ergebnisse erhalten (A: Helipot-Stellung bei abgeglicherer Brücke):

- für $R_v=10\Omega$:

U [V]	A [Skt]	R [Ω]	I [mA]
0,5	775,0 \pm 1,3	34,4 \pm 0,6	11,3 \pm 2,4
1	835,0 \pm 1,3	50,6 \pm 1,0	16,5 \pm 1,8
2	877,5 \pm 1,4	71,6 \pm 1,6	24,5 \pm 1,5
3	897,5 \pm 1,4	87,6 \pm 2,2	30,8 \pm 1,4
4	909,0 \pm 1,4	99,9 \pm 2,7	36,4 \pm 1,4
5	917,0 \pm 1,4	110,5 \pm 3,2	41,5 \pm 1,5

- für $R_v=200\Omega$:

U [V]	A [Skt]	R [Ω]	I [mA]
0,5	82,5 \pm 0,6	18,0 \pm 0,3	2,3 \pm 0,5
1	87,5 \pm 0,6	19,2 \pm 0,3	4,6 \pm 0,5
2	113,0 \pm 0,6	25,5 \pm 0,4	8,9 \pm 0,5
3	162,0 \pm 0,7	38,7 \pm 0,6	12,6 \pm 0,5
4	204,5 \pm 0,7	51,4 \pm 0,7	15,9 \pm 0,6
5	231,5 \pm 0,7	60,2 \pm 0,9	19,2 \pm 0,6

Dabei wurden die Fehler für den Widerstand wie in Aufgabe 2b (für A: Ablesefehler von $\pm 0,5$ Skt mit Linearitätstoleranz von 0,1% linear addiert) errechnet, d.h. der systematische Fehler von R_v wurde linear zum (statistischen) Fehler von A addiert

Außerdem sollte der (ohmsche) Widerstand der Glühbirne in Abhängigkeit von der Stromstärke durch die Lampe dargestellt werden. Wenn die Brücke abgeglichen ist, fließt kein Strom durch das Abgleichsmessgerät und es ergibt sich der Zusammenhang

$$I = \frac{U}{R_{\text{Glühbirne}} + R_v} = \frac{U}{\frac{A}{1000 - A} \cdot R_v + R_v} = \frac{U}{R_v \cdot \left(\frac{A}{1000 - A} + 1 \right)} = \frac{U}{R_v} \cdot \left(1 - \frac{A}{1000} \right)$$

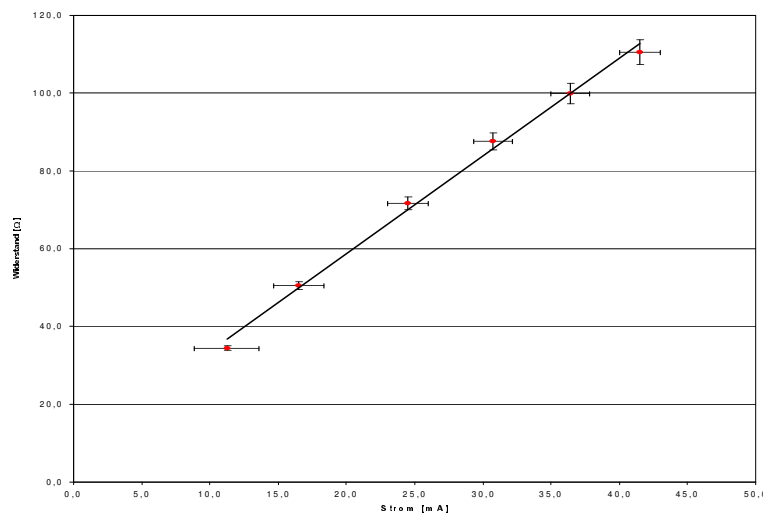
Die Fehler ΔI für die Stromstärken in den Tabellen und Fehlerbalken ergeben sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Fehler des Vergleichswiderstandes R_v systematischer Art ist (also linear zu den anderen beiden statistischen Fehlern von U und A addiert werden muss) über die Beziehung:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial U} \cdot \Delta U \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial A} \cdot \Delta A \right)^2} + \left| \frac{\partial I}{\partial R_v} \cdot \Delta R_v \right| =$$

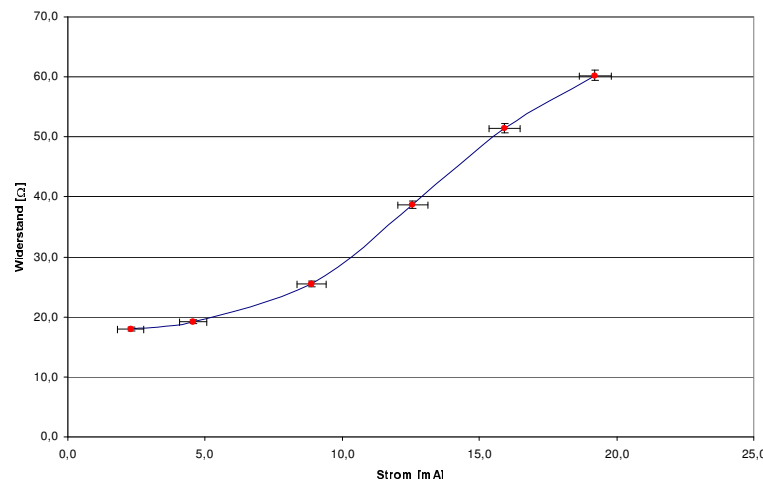
$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{R_v} \cdot \left(1 - \frac{A}{1000} \right) \right)^2 + \left(\frac{U \cdot \Delta A}{R_v \cdot 1000} \right)^2} + \left| \frac{U \cdot \Delta R_v}{(R_v)^2} \cdot \left(1 - \frac{A}{1000} \right) \right|$$

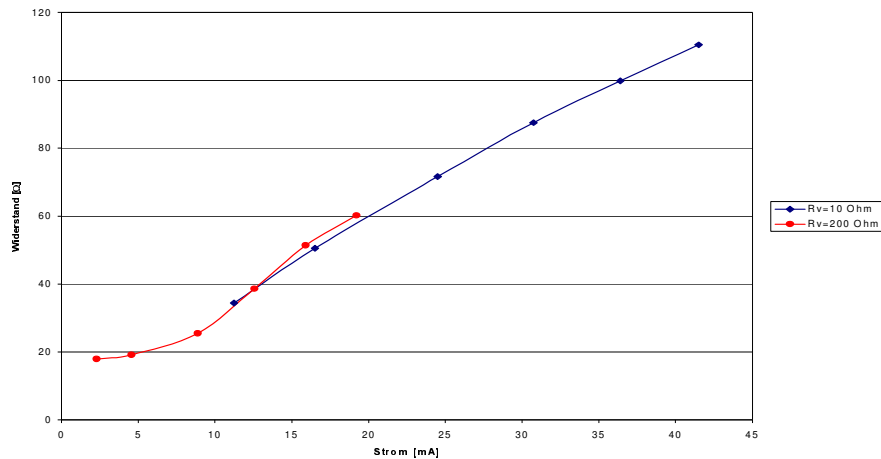
Man erkennt aus untenstehenden Diagrammen, dass der Widerstand nur in einem Teilbereich (etwa zwischen 15mA und 40mA) in guter Näherung linear von der Stromstärke abhängt. Bei geringeren Strömen, wie sie mit dem Vergleichswiderstand von 200Ω erzielt wurden, wächst der Widerstand hingegen nicht linear und im Vergleich langsamer mit der Stromstärke.

$R_v = 10\Omega$:



$R_v = 200\Omega$:





Offensichtlich ist die Glühbirne also kein ohmscher Widerstand (bei einem solchen wäre der elektrische Widerstand von der Stromstärke unabhängig). Der Hauptgrund für diese Tatsache dürfte in der mit der Stromstärke zunehmenden Temperatur der Glühwendel zu suchen sein. Insbesondere beginnt die Wendel ab einer bestimmten Stromstärke (knapp unterhalb von 10 mA) zu glühen, wodurch offensichtlich der Widerstand mit weiter wachsender Stromstärke steiler ansteigt, als bei Strömen unterhalb dieser Grenze.

2.4 Aufgabe 3: Ohmscher Widerstand der beiden Spulen

Mit der mittlerweile bekannten Schaltung wurde bei einem Vergleichswiderstand von $R_v = 10 \Omega \pm 0,1 \Omega$ und einer Spannung von 0,5V der ohmsche Widerstand der beiden Spulen gemessen.

- **Große Spule mit bekannter Induktivität (250 Windungen)**

Messung zwischen	A [Skt]	R [Ω]
A und E	54,0 \pm 0,6	0,571 \pm 0,012
A und M	26,0 \pm 0,5	0,267 \pm 0,008
M und E	30,0 \pm 0,5	0,309 \pm 0,009

- **Kleine Spule mit unbekannter Induktivität**

Im abgeglichenen Zustand zeigte das Helipot $A = 786,0 \text{ Skt} \pm 1,3 \text{ Skt}$ an. Daraus ergibt sich ein Widerstand der Spule von $R = 36,7 \pm 0,6 \Omega$.

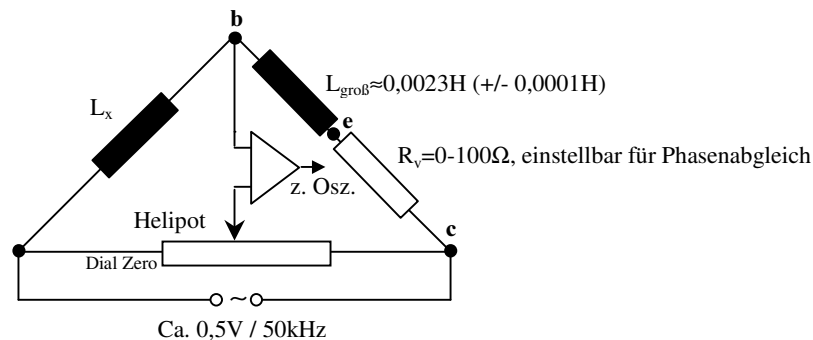
Die Fehler in obigen Tabellen ergeben sich in der bereits beschriebenen Weise über lineare Addition der systematischen Anteile zu den statistischen (siehe Aufgaben 2b und 2c).

2.5 Aufgabe 4: Induktivität der Spule und Kapazität des Kondensators

Bei diesen Messungen wurde mit einer **Wechselspannungsbrücke** gemessen.

- Zunächst einmal zu den Messungen mit den **Spulen**:

Schaltplan:



Es wird der X-Eingang des Oszilloskops mit der Speisespannung ($U \approx 0,5\text{V}$; $f \approx 50\text{kHz} \pm 1,5\text{kHz}$) sowie der Y-Eingang mit der verstärkten Diagonalspannung der Brücke verbunden und das Gerät in den X-Y-Modus geschaltet. Im Versuchsaufbau tritt, da im Normalfall das Gleichstrom-Widerstandsverhältnis der Spulen nicht gleich ihrem Induktivitätsverhältnis ist, nach (17) eine Phasenverschiebung der Ströme durch die beiden Spulen gegeneinander auf; somit muss vor die große Spule ein einstellbarer Vorwiderstand R_v geschaltet werden, damit die Brücke abgeglichen werden kann. Die Abgleichbedingung der Wechselstrombrücke enthält nämlich die Forderung, dass keine Phasenverschiebung der Wechselstromwiderstandszeiger von L_{mess} und $L_{\text{Vergleich}}$ mehr vorhanden sein darf, also das Verhältnis $Z_{\text{mess}}/Z_{\text{Vergleich}}$ zeitlich konstant sein muss.

Der **Abgleichvorgang** läuft nun so ab: Zunächst versucht man, die maximale Spannungsdifferenz in der Diagonalen zu minimieren, indem man mittels Helipot die Lissajous-Figur waagrecht dreht. Dann gleicht man die Phasendifferenz mittels des variablen Vorwiderstandes ab, der so einzustellen ist, dass die auf dem Oszilloskopschirm erscheinende Lissajous-Figur möglichst flach ist. Deutet man die Graphik, so heißt diese Entartung der Ellipse zu einer Linie, dass zwischen Versorgungs- und Brückenspannung ein linearer Zusammenhang besteht. Dieser rührt daher, dass im abgeglichenen Zustand das Wechselstromwiderstandsverhältnis der Spulen zeitlich konstant (und reell) ist und somit die Spannung in Punkt E im Rhythmus der anliegenden Spannung schwankt. Dies macht dann auch die Spannungsdifferenz in der Brückendiagonalen; sie verhält sich also so, als ob Z_{mess} und $Z_{\text{Vergleich}}$ reelle („Gleichstrom-“)Widerstände wären.

Es empfiehlt sich insgesamt, den zweistufigen Abgleichvorgang ca. 3 mal hintereinander bei steigender Oszilloskop-Y-Auflösung durchzuführen, um schließlich einen feinen Abgleich zu erzielen.

Zum Versuch gehörte auch noch, eine alternative Abgleichmethode im „**Dual**“-Betrieb des Oszilloskops auszuprobieren. Hierbei stellt das Oszilloskop die am X- und Y-Eingang anliegenden Spannungen gleichzeitig gegen die Zeit dar. Hier muss man zunächst mittels des variablen Vorwiderstandes die Y-Sinuskurve so verändern, dass sie gleichzeitig mit der X-Sinuskurve „anfängt“ (d.h. die Nullstellen und Maximalstellen müssen dieselben sein) und sie dann mittels Helipot zu Null regeln. Auch hier kann man mittels Y-Auflösungs-Verstellung wieder einen mehrstufigen Abgleich vornehmen.

Die Messungen im X-Y-Modus werden in der Hauptsache zur Auswertung herangezogen. Daher wurden sie fünffach wiederholt, um über Mittelwertbildung statistische Abgleichfehler zu minimieren.

Die erste Teilaufgabe war, die Induktivität einer kleinen Spule zu messen (Vergleichsinduktivität: große Spule mit bekannter Induktivität von 0,0023H zwischen den Abgriffen A (Anfang) und E (Ende)). Dann sollte in einer zweiten Messung dieser gewonnene Wert dazu genutzt werden, die Induktivität der großen Spule zwischen den Abgriffen A und M (Mittelabgriff) zu messen. Da wir allerdings die (nun „halbierte“) große Spule immer noch zwischen den Punkten c und e (vgl. Schaltbild) eingebaut hatten und auch ansonsten die Schaltung gleich blieb, ist zu beachten, dass hier im abgeglichenen Fall für die Induktivitäten und den zu errechnenden Mittelwert der Helipot-Einstellung A gilt:

$$L_{x(\text{gro\ss.halb})} = \frac{1000 - \bar{A}}{\bar{A}} L_{\text{kleinVergleich}}$$

(im Gegensatz zur normalen, im Skriptum gegebenen Beziehung $L_x = \frac{\bar{A}}{1000 - \bar{A}} L_{\text{Vergleich}}$, welche für die Messung der kleinen Spule anzuwenden ist.)

Messung der kleinen Spule:

Nachdem die Berechnung des Spulenwiderstandes klar ist, stellt sich nur noch die Frage, wie die Fehlerrechnung in diesem Falle durchzuführen ist. Der statistische Fehler, der hauptsächlich durch Abgleichunsicherheiten entsteht, kann schlecht aus dem Messaufbau und Geräteeigenschaften hergeleitet werden, da der Abgleichfehler am Oszilloskop nicht einzuschätzen ist. Somit wird ein anderer Weg zur Fehlerabschätzung zunächst für die Größe A gegangen, der erst durch die Mittelwertbildung gangbar ist:

Die Standardabweichung s der Messgröße ist gegeben durch: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (A_i - \bar{A})^2}{4}}$

Es gilt dann: $\Delta \bar{A} = s \cdot \frac{t(5; 1-k)}{\sqrt{n}}$, wobei s die Standardabweichung, n die Versuchsanzahl, sowie t die Studentfunktion mit den Parametern 5 (Versuchsanzahl) und $1-k=\alpha$ (k : Konfidenzniveau) ist.

Man wählt nun (willkürlich) ein Konfidenzniveau von 99% und bekommt dazu die Schwankungsbreite $\Delta \bar{A}$ für den berechneten Mittelwert von A . Das bedeutet: Man errechnet einen Toleranzbereich um den wahren Wert für A , in den aus fünf Messungen errechnete Mittelwerte für A mit 99% Wahrscheinlichkeit fallen. Das errechnete $\Delta \bar{A}$ hat also praktisch die Bedeutung einer maximalen Schwankungsbreite.

Die aufgezählten Berechnungen sind mit den Versuchsergebnissen in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Versuch:	1.	2.	3.	4.	5.
Ergebnis (A):	632,0	633,0	632,5	632,0	631,0
Mittelwert:	632,1				
quadr. Abweichung v. Mittelw.:	0,01	0,81	0,16	0,01	1,21
Standardabweichung:	0,74				
Studentfkt. (Tabellenwert)	4,60				
Schwankungsbr. des Mw.:	1,53				
Wert f. L (aus Mittelwert; in mH)	3,95				

Man sieht hier, dass der statistische Fehler des Mittelwertes sehr gering ist. Allerdings wird die Messgenauigkeit evtl. durch einen systematischen Fehler überlagert, der durch eine Fehleichung der Helipotkala entstehen kann. Hierzu gibt es prozentuale Herstellerangaben, die man in absolute Fehler umrechnet und linear zum statistischen Fehler addiert:

Widerstandstoleranz: $\pm 1\%$. Diese hat auf das Widerstandsverhältnis und damit auf A keinerlei Auswirkungen.

Linearitätstoleranz (zw. Widerstandsbahn und Skalenanzeige): $\pm 0,1\%$. Diese zählt ebenfalls zu den systematischen Fehlern, da sie bei einer ungefähr gleichbleibenden Potentiometereinstellung immer nur in die gleiche Richtung ins Gewicht fällt. In Skalenteilen beträgt sie ca. $\pm 0,6$.

Addiert man zu dieser Toleranz die errechnete Schwankungsbreite des Mittelwerts, so erhält man einen Gesamtfehler für A von ca. 2,1 Skt.

Nun muss man nur noch den Fehler für die gemessene Induktivität ausrechnen. Es gibt noch weitere Fehlerquellen als die in A eingehenden, die oben genannt sind. Es handelt sich dabei einerseits um eher geringfügige elektrische Effekte (z.B. Zuleitungswiderstände), die wir für vernachlässigbar im Rahmen unseres impliziten Fehlers halten, und andererseits um die Induktivitätstoleranz der Vergleichsspule ($\pm 0,0001H$). Dieser Fehler, der systematischer Art ist, wird mit dem Fehler für A linear addiert:

Es gilt: $L_x = \frac{\bar{A}}{1000 - \bar{A}} L_{Vergleich}$ und damit:

$$L_x \approx 4,0mH; \Delta L_x = \frac{\partial L_x}{\partial \bar{A}} \Delta \bar{A} + \frac{\partial L_x}{\partial L_v} \Delta L_v \approx L_v \cdot \frac{1000 - \bar{A} + \bar{A}}{(1000 - \bar{A})^2} \cdot 2,1 + \frac{\bar{A}}{1000 - \bar{A}} \cdot 0,1mH \approx 0,2mH.$$

Im Dual-Betrieb ergab sich eine Helipot-Einstellung von ca. 627; dies entspricht einer Induktivität von ca. 3,9mH.

Messung der „halben“ großen Spule:

Auch hier gilt es neben der Induktivitätsberechnung mittels der Formel

$$L_{x(gro\beta,halb)} = \frac{1000 - \bar{A}}{\bar{A}} L_{kleinVergleich} (!) \text{ wieder, zun\u00e4chst den Fehler f\u00fcr } A \text{ und dann den Gesamtfehler}$$

f\u00fcr die zu messende Induktivit\u00e4t zu berechnen. Hierzu wird die oben bereits beschriebene Methodik analog angewandt, wobei die Vergleichsspule die oben errechnete Induktivit\u00e4t von $4,0mH \pm 0,2mH$ hat. Wenn man f\u00fcr die halbe Spule grob die halbe Windungszahl annimmt (dies entspricht

auch ungefähr dem Widerstandsverhältnis $R_{AM}/R_{AE} \approx 0,47$), so gibt es zwei naheliegende Extremmöglichkeiten für das Wicklungsschema: Entweder, die volle Spulenlänge ist durch die Halbwicklung bewickelt und die halbe Wicklung stellt sozusagen einen Teil der Wicklungslagen dar,

dann ist mit $L = \mu_0 \mu_r \cdot \text{Fläche}_{\text{Spulenloch}} \cdot \frac{\text{Windungszahl}^2}{\text{Länge}}$ also mit einer Viertelung der Induktivität

zu rechnen, oder aber die halbe Wicklung ist auch nur über die halbe Spulenlänge gewickelt, dann wäre mit der halben Induktivität zu rechnen. Freilich könnten auch Werte zwischen diesen Extremen auftreten.

Nun aber zu den Berechnungen, die wir mit der gleichen Tabelle wie oben durchführen:

Versuch:	1.	2.	3.	4.	5.
Ergebnis (A):	883,0	882,5	882,5	882,0	882,0
Mittelwert:	882,4				
quadr. Abweichung v. Mittelw.:	0,36	0,01	0,01	0,16	0,16
Standardabweichung:	0,42				
Studentfkt. (Tabellenwert)	4,60				
Schwankungsbr. des Mw.:	0,86				
Wert f. L (aus Mittelwert; in mH)	0,53				
Verhältn. (Wert f. L / 2,3mH)	0,23				

$L_{x(\text{groß,halb})}$ ergibt sich also ungefähr zu 0,53 mH. Berechnen wir nun den kompletten Fehler für die Größe $L_{x(\text{groß,halb})}$:

Der Gesamtfehler für A in Skalenteilen ist analog oben (Linearitätstoleranz ca. $\pm 0,9$ Skt.) ca. 1,8 Skt. Mit einer Induktivitätstoleranz von ca. $\pm 0,2$ mH und der veränderten partiellen Ableitung von $L_{x(\text{groß,halb})}$ (andere Formel!) lautet die Fehlerberechnung für $L_{x(\text{groß,halb})}$:

$$\Delta L_{x(\text{groß,halb})} = \left| \frac{\partial L_{x(\text{groß,halb})}}{\partial \bar{A}} \Delta \bar{A} \right| + \left| \frac{\partial L_{x(\text{groß,halb})}}{\partial L_v} \Delta L_v \right| \approx L_v \cdot \left| \frac{-\bar{A} - 1000 + \bar{A}}{(\bar{A})^2} \right| \cdot 1,8 + \frac{1000 - \bar{A}}{\bar{A}} \cdot 0,2 \text{ mH}$$

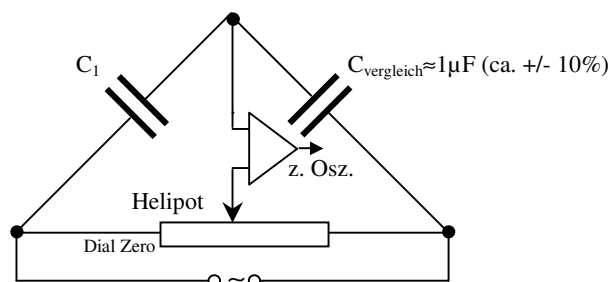
$$\approx 0,04 \text{ mH}$$

Die Induktivität der „halben Spule“ ist also (letzte Tabellenzeile) grob $\frac{1}{4}$ der Induktivität der Gesamtspule, d.h. die halbe Wicklung ist offensichtlich über die gesamte Spulenlänge verteilt.

Im Dual-Betrieb ergab sich bei diesem Versuch eine Einstellung von ca. 882; dies entspricht einer Induktivität von ca. 0,54mH.

- Messungen mit den **Kondensatoren**:

Schaltplan:



Mit der oben abgebildeten Schaltung (Frequenz der Versorgungsspannung wieder ca. 50 kHz) sollte abschließend noch die Kapazität eines unbekanntes Kondensators gemessen werden. Dabei waren nach Anleitung ohmsche Widerstände zu vernachlässigen. Dies hat zur Folge, dass im Gegensatz zur Induktivitätsmessung kein Phasenabgleich durch einen zusätzlichen Widerstand erfolgen muss, sondern es gilt die einfachere Abgleichbedingung:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\omega C_v}{\omega C_1} = \frac{C_v}{C_1} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{A}{1000 - A} \Leftrightarrow C_1 = \frac{(1000 - A) \cdot C_v}{A}$$

Dabei ist C_1 der zu messende, C_v der Vergleichskondensator mit bekannter Kapazität. In unserem Fall war $C_v = 1 \mu\text{F}$ (ein Folienkondensator der Firma Siemens), wobei leider nicht angegeben war, mit welcher Toleranz diese Angabe behaftet ist. Wir können aber von ähnlichen im Handel erhältlichen Ausführungen ausgehen, und halten aus dieser Sicht eine Toleranz von $\pm 10\%$ für realistisch. Damit ist $C_v = 1 \mu\text{F} \pm 0,1 \mu\text{F}$.

Der Brückenabgleich beschränkt sich bei dieser Messung darauf, im X-Y-Modus die Linie auf dem Oszilloskop durch Drehen am Helipot in eine möglichst waagrechte Position zu bringen, wobei wieder die y-Empfindlichkeit des Oszilloskops schrittweise erhöht wird. Um die Messunsicherheit hierbei abschätzen zu können, wurde dieser Abgleich fünf mal unabhängig voneinander durchgeführt:

Messung	1	2	3	4	5
A [Skt]	318,0	318,0	318,0	317,0	317,0

Analog wie bei der Bestimmung der unbekanntes Induktivität schätzt man daraus den Fehler von A ab:

Mittelwert: $\bar{A} = 317,6 \text{Skt}$

Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (A_i - \bar{A})^2}{4}} \approx 0,55 \text{Skt}$

Studentfunktion für 5 Messwerte und ein Konfidenzniveau von 99%: $t = 4,60$

Somit erhält man für den (statistischen) Fehler des Mittelwertes: $\Delta \bar{A} = s \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} \approx 1,13 \text{Skt}$

Nach linearer Addition des systematischen Linearitätsfehlers am Helipot von 0,1% (ca. 0,3 Skt) bekommt man schließlich: $A \approx 317,6 \text{Skt} \pm 1,4 \text{Skt}$

Damit lässt sich die **unbekannte Kapazität** berechnen. Es ergibt sich: $C_1 = 2,14 \mu\text{F} \pm 0,23 \mu\text{F}$.

Zur Bestimmung des Gesamtfehlers ΔC_1 wurde neben dem Fehler von A auch der Fehler von C_v berücksichtigt. Da es sich hierbei um einen systematischen Fehler handelt, wurde er wieder linear addiert:

$$\Delta C_1 = \left| \frac{\partial C_1}{\partial A} \cdot \Delta A \right| + \left| \frac{\partial C_1}{\partial C_v} \cdot \Delta C_v \right| = \frac{1000 \cdot C_v}{A^2} \cdot \Delta A + \frac{1000 - A}{A} \cdot \Delta C_v$$