

# Versuch: Beugung und Brechung (11.11.2002)

## Inhalt:

- |    |                          |          |
|----|--------------------------|----------|
| 1. | Einführung zum Versuch   | Seite 1  |
| 2. | Messungen und Auswertung | Seite 1  |
| 3. | Beantwortung der Fragen  | Seite 13 |

## 1. Einführung zum Versuch

Bekanntermaßen kann Licht weder im Wellen- noch im Teilchenmodell allein mit all seinen Eigenschaften vollständig beschrieben werden. Beispielsweise lassen sich die Beugungsphänomene nur unter Berücksichtigung des Wellencharakters verstehen, während man zur Erklärung der Brechung mit dem Teilchenmodell auskommt.

Im vorliegenden Versuch sollen nun beide Arten von Erscheinungen untersucht werden: die Beugung beim Durchgang des Lichtes durch einen Einfachspalt und ein Gitter und die Brechung an einem Prisma. Die Beugungsversuche dienen dabei zur Bestimmung der Lichtwellenlänge und bei der Brechung wird insbesondere die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge untersucht (woraus man dann ebenfalls auf die Wellenlänge einer unbekanntem Linie zurückschließen kann).

## 2. Messungen und Auswertung

### 2.1 Wellenlängenbestimmung am Einfachspalt

Bei diesem Versuch wird wie in der Anleitung beschrieben das (nach einem Kohärenzspalt und einem geeigneten Farbfilter) monochromatische und ausreichend kohärente Licht einer Hg-Lampe (es enthält praktisch ausschließlich die grüne Hg-Linie) an einem Einfachspalt der Breite  $d=119\mu\text{m}\pm 2\mu\text{m}$  gebeugt. Das dadurch entstehende Interferenzmuster wird auf einem Dia abgebildet und kann mit einer Lupe betrachtet werden. Ein auf dem Dia eingetragener Maßstab ermöglicht die Ausmessung der Abstände zwischen den Helligkeitsmaxima. Dabei wurden zu jeder Beugungsordnung (insgesamt bis zur Ordnung 5) die Positionen beider Maxima (rechts und links der Mitte) bestimmt. Die halbe Differenz dieser Werte ist dann der im folgenden verwendete Wert für die Auslenkung  $s$ . Die Entfernung  $l$  zwischen Spalt und Dia wurde, um ein möglichst genaues Ergebnis zu erzielen, nicht über die Skala auf der optischen Bank, sondern direkt mit einem Maßband auf Höhe des Spaltes bestimmt. Auf diese Weise entfallen die Einflüsse von verkippten Reitern und nicht-zentrierten Haltern.

**a) Rechtfertigung der Kleinwinkelnäherung und die benötigten Gleichungen in Kleinwinkelnäherung**

Gemäß Gl. (15) der Anleitung kann aus dem gemessenen Längen  $s$  (Abstand des Maximums  $n$ -ter Ordnung vom 0. Hauptmaximum),  $l$  (Abstand zwischen Spalt und Schirm) sowie der Spaltbreite  $d$  die Wellenlänge  $\lambda$  errechnet werden:

$$\lambda = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot d \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{s}{l}\right)\right)$$

Für hinreichend kleine Auslenkungswinkel  $\alpha = \arctan\left(\frac{s}{l}\right)$  ist es möglich, diese Beziehung mithilfe einer Kleinwinkelnäherung  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$  zu vereinfachen. Dann ist wegen  $\alpha \approx s/l$

$$\lambda \approx \frac{d}{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{l}$$

Zunächst müssen wir aber nachweisen, dass bei der Geometrie der gegebenen Anordnung diese Näherung hinreichend genau ist (d.h. dass die sonstigen Fehler überwiegen). Vergleichen wir dazu die  $\lambda$ -Werte, die man mit der exakten und der vereinfachten Formel erhält.

Der größte Fehler tritt dann natürlich für den größten Wert von  $s/l$  auf, nämlich 0,0292 (in der 5. Ordnung, vgl. Messwerttabelle in Abschnitt b)).

Daraus erhält man mit der exakten Formel eine Wellenlänge von  $\lambda_{\text{exakt}} \approx 631,5 \text{ nm}$ , während die Näherungsformel einen Wert von  $\lambda_{\text{genähert}} \approx 631,8 \text{ nm}$  liefert. Die Abweichung vom exakten Wert ist daher lediglich ca. 0,04% und somit, wie wir im Rahmen der späteren Fehlerrechnung zeigen werden, absolut vernachlässigbar gegenüber den sonstigen Fehlern.

**b) Messwerte und Berechnung der Wellenlänge samt Fehlerrechnung**

Kommen wir nun zu unseren Messwerten. Für insgesamt drei verschiedene Längen  $l$  wurden die Helligkeitsmaxima bis zur 5. Ordnung vermessen. Die entsprechenden Werte sind nachfolgender Tabelle zu entnehmen (man beachte dabei, dass die Werte im Protokollheft jeweils zehn mal so groß sind wie die hier angegebenen Längen, da dort der Diamaßstab von 1:10 noch nicht berücksichtigt wurde).

Messung 1					
$l_1 [\text{cm}] = 30,6$					
Ordnung	Ordnung+1/2	linke Seite [cm]	rechte Seite [cm]	s	s/l
1	1,5	1,07	1,52	0,225	0,0074
2	2,5	0,92	1,66	0,370	0,0121
3	3,5	0,77	1,80	0,515	0,0168
4	4,5	0,63	1,95	0,660	0,0216
5	5,5	0,49	2,10	0,805	0,0263

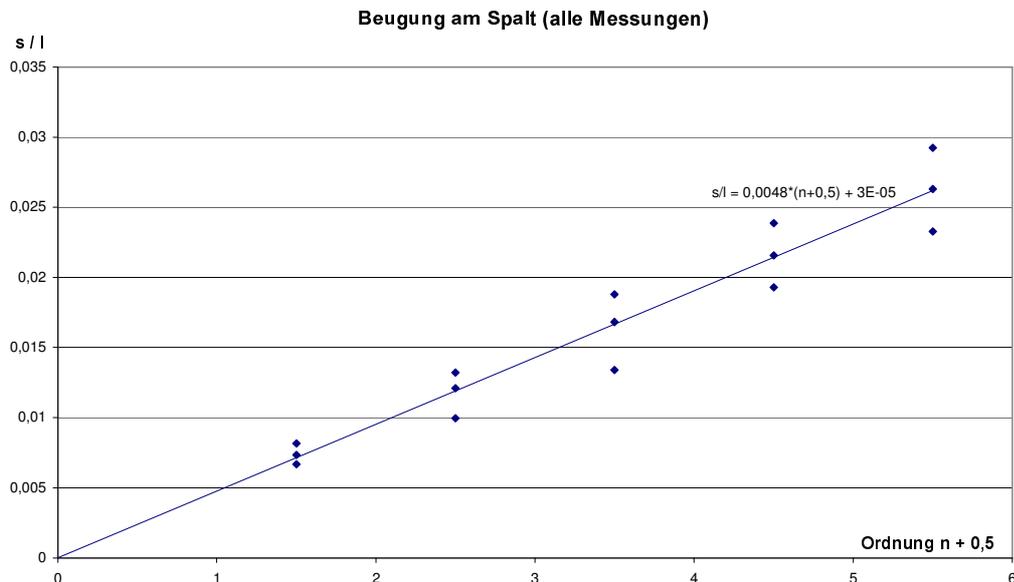
Messung 2					
$l_2 [\text{cm}] = 33,7$					
Ordnung	Ordnung+1/2	linke Seite [cm]	rechte Seite [cm]	s	s/l
1	1,5	1,31	1,81	0,250	0,0082
2	2,5	1,15	1,96	0,405	0,0132
3	3,5	0,98	2,13	0,575	0,0188
4	4,5	0,83	2,29	0,730	0,0239
5	5,5	0,66	2,45	0,895	0,0292

Messung 3					
$l_3 [\text{cm}] = 27,0$					
Ordnung	Ordnung+1/2	linke Seite [cm]	rechte Seite [cm]	s	s/l
1	1,5	1,32	1,73	0,205	0,0067
2	2,5	1,20	1,81	0,305	0,0100
3	3,5	1,17	1,99	0,410	0,0134
4	4,5	0,94	2,12	0,590	0,0193
5	5,5	0,83	2,25	0,713	0,0233

Nun können wir alle Werte in einem Diagramm  $s/l$  gegen  $n+1/2$  auftragen.

*Bemerkung: Die Auftragung von  $n+1/2$  in x-Richtung bewirkt, dass wir (im Idealfall) Ursprungsgeraden erhalten, wie man leicht aus obiger Formel zur Wellenlängenberechnung erkennt, während bei  $s/l$  gegen  $n$  die Geraden um eine halbe Einheit nach oben verschoben sind. An der Steigung ändert diese Transformation aber nichts.*



Man erkennt, dass erwartungsgemäß die Streuung der Werte gleicher Ordnung  $n$  mit zunehmendem  $n$  steigt. Grobe Ausreißer etwa durch Schreibfehler o.ä. lassen sich aber nicht feststellen und wir wollen hier keine systematischen Korrekturen an den Messwerten anbringen.

Mit den bekannten Formeln kann man nun eine Regressionsgerade durch die Messpunkte bestimmen. Es ergibt sich, dass die Steigung  $m$  dieser Geraden

$$m \approx 4,76 \cdot 10^{-3}$$

und der Achsenabschnitt  $t$

$$t \approx 3,0 \cdot 10^{-5}$$

beträgt.

Weiterhin gewinnt man (in unserem Fall mit der linearen Regressionsfunktion der verwendeten Tabellenkalkulation) auch die statistischen Fehler von Steigung und Achsenabschnitt wie folgt:

$$\Delta m \approx 0,36 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta t \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$$

Die Gerade geht also tatsächlich im Rahmen des statistischen Fehlers durch den Ursprung.

Damit wir nun aus diesen Werten die Wellenlänge berechnen können, formen wir die oben abgeleitete Näherungsgleichung für  $\lambda$  so um, dass wir die Geradensteigung direkt einsetzen können. Wegen

$$m = \frac{s}{l \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

ergibt sich sofort

$$\lambda = d \cdot m .$$

Damit und mit  $d=119\mu\text{m}$  erhalten wir schließlich als **Wellenlänge der grünen Hg-Emissionslinie**

$$\lambda \approx 566\text{nm} .$$

Kommen wir nun zur Bestimmung des Fehlers, mit dem dieser Wert behaftet ist.

Dabei konzentrieren wir uns zunächst auf die **systematischen Fehleranteile**:

- die **Spaltbreite  $d$**  ist mit einer Toleranz von  $\pm 2\mu\text{m}$  gegeben, also  $d = 119\mu\text{m} \pm 2\mu\text{m}$ . Dies entspricht einem Relativfehler von etwa 1,7%.
- der **Abstand  $l$**  zwischen Spalt und Dia wurde nur einmal gemessen, weshalb sein Fehler ebenfalls systematischer Natur ist. Für die oben beschriebene Messung mit dem Maßband halten wir einen Fehler von  $\pm 3\text{mm}$  für angemessen. Darin sind dann neben einem möglicherweise systematisch falschen Maßstab auch die Unsicherheiten durch Dicke von Dia und Spalt und durch unbekannte Schichtseite des Dias enthalten.  
Man wird unten sehen, dass die Rechnung wesentlich leichter mit einem relativen als mit einem Absolutfehler durchgeführt werden kann, weshalb wir auch ersteren noch bestimmen. Obige Toleranz entspricht bei allen drei Werten von  $l$  etwa einem Relativfehler von 1% .
- die **Auslenkung  $s$**  kann aus zwei Quellen mit einem systematischen Fehler behaftet sein: Zum einen ist der Diamaßstab laut Anleitung nur bis auf  $\pm 2\%$  exakt. Zum anderen kann es sein, dass das Dia mit dem Maßstab nicht genau senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes ausgerichtet war, wobei wir einen Verkippungswinkel von  $\pm 5^\circ$  für realistisch halten. Aus einer einfachen geometrischen Überlegung ergibt sich, dass dies für den Abstand  $s$  einen relativen Fehler von  $1 - \cos(5^\circ) \approx 0,38\%$  zur Folge hat.

Damit ergibt sich insgesamt ein Relativfehler von etwa  $\pm 2,4\%$ .

Aus diesen Ergebnissen lässt sich nun ein **systematischer Gesamtfehler** für die Wellenlänge errechnen. Dabei tritt das Problem auf, dass in den partiellen Ableitungen für die Fehlerfortpflanzung auch die Größen  $s$  und  $l$  vorkommen, welche aber nicht konstant sind. Um dies zu umgehen, benutzen wir die Tatsache, dass sich statt dessen einfach alle relativen Fehler addieren lassen, wenn sich, wie hier, die gesuchte Größe nur als Produkt der Messgrößen ergibt. Es gilt:

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{sys}}}{\lambda} = \frac{\Delta d_{\text{sys}}}{d} + \frac{\Delta l_{\text{sys}}}{l} + \frac{\Delta s_{\text{sys}}}{s}$$

Damit erhalten wir für die Wellenlänge einen systematischen gesamten Relativfehler von 5,1%. Mit dem oben errechneten  $\lambda$  findet man schließlich den gesuchten **systematischen Absolutfehler**

$$\Delta\lambda_{\text{sys}} \approx 29\text{nm} .$$

Als nächstes betrachten wir die **statistischen Fehleranteile**. Offensichtlich liefert hier nur die Größe  $s$  einen Beitrag, der durch die oben bestimmte Regressionsgerade erfasst wurde. Es gilt wegen  $\lambda = m \cdot d$ :

$$\Delta\lambda_{\text{stat}} = d \cdot \Delta m_{\text{stat}}$$

Mit dem oben berechneten Steigungsfehler der Regressionsgeraden folgt

$$\Delta\lambda_{stat} \approx 43nm .$$

Man erkennt, dass der statistische Fehler, der in erster Linie durch Ableseunsicherheiten entsteht, z.B. weil die Maxima eine relativ große Breite haben und in den höheren Ordnungen teilweise recht schwer zu erkennen sind, gegenüber dem systematischen Fehler deutlich überwiegt.

Für den Gesamtfehler der Wellenlänge werden abschließend die beiden Fehleranteile linear addiert. Damit ist unser **Ergebnis**:

$$\lambda = 566nm \pm 72nm .$$

Der **Literaturwert** für die Wellenlänge der verwendeten Hg-Linie ist **546,1nm** und liegt somit im Toleranzbereich unserer Messungen (was allerdings bei dem sehr hohen Fehler auch nicht verwunderlich sein sollte).

## 2.2 Wellenlängenbestimmung am Gitter

In diesem Versuch soll Licht aus einer Hg-Dampflampe an einem Gitter gebeugt werden. Das Licht ist nicht monochromatisch; es stellt sich heraus, dass die Interferenzmaxima auf einem Transparentpapierstreifen, der die Länge  $l$  vom Gitter entfernt zur Gitterebene parallel angebracht ist, nach Farben getrennt an verschiedenen Stellen auftreten. Die einzige Ausnahme macht das zentrierte Maximum 0. Ordnung; der Abstand der übrigen Maxima von diesem weißen Strich wird von der Anlenkung Auslenkung  $s$  für das jeweilige Maximum genannt. Es gilt nach Anlenkung folgende Beziehung zwischen Wellenlänge und Auslenkung:

$$\lambda = \frac{a}{n} \sin \left( \arctan \left( \frac{s}{l} \right) \right),$$

wo  $a$  die Gitterkonstante (gegeben mit  $10,00\mu m \pm 0,02\mu m$ ) und  $n$  die Ordnung des Maximums ist. Wenn wir bei festem  $l$  das  $s$  für jede Ordnung  $n$  messen, so können wir je Farbe analog oben eine Regressionsgerade für  $\arctan(s/l)$  gegen  $n$  bestimmen und aus der Steigung die Wellenlänge bestimmen.

### a) Kleinwinkelnäherung

Es soll hier gezeigt werden, dass die Kleinwinkelnäherung für die Werte  $\sin(\arctan(s/l))$  bei diesem Versuchsteil (und damit für  $\lambda$ ) nicht vernachlässigbare Fehler produzieren würde, und für die Auswertung deshalb ungeeignet ist.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir den höchsten beim Versuch auftretenden Wert für  $s/l$  (ca. 0,3454) mit dem entsprechenden Wert  $\sin(\arctan(0,3454)) \approx 0,3265$ . Wir sehen, dass sich bei diesem Wert durch die Kleinwinkelnäherung ein Fehler von ca. 0,019, also etwa 6%, ergeben würde. Dies ist größer als die weiter unten berechneten Gesamtfehler für die Wellenlänge (diese liegen umgerechnet bei ca. 4%); daher kann die Kleinwinkelnäherung nicht für die Auswertung herangezogen werden, weil durch den Näherungsfehler (der ja mit der Höhe des Messwertes für  $s/l$  ansteigt) auch die Steigung der Regressionsgerade und damit der ermittelte Wert für  $\lambda$  ungefähr um die genannten 6% nach oben abweichen würde (wenn man einmal näherungsweise davon ausgeht, dass die Geraden durch den letzten rechts oben gelegenen Punkt gehen müssen).

**b) Messwerte, Diagramme, Wellenlängenberechnung und Fehlerbehandlung**

Die Banden des Beugungsbildes wurden auf dem Transparentpapierstreifen mit Farbstift nachgefahren und erst später im Rahmen der Auswertung vermessen; die Auslenkung  $s$  der verschiedenen Maxima erhält man, indem man jeweils den Abstand zwischen den beiden Maxima (links und rechts) einer Ordnung und Farbe misst und halbiert.

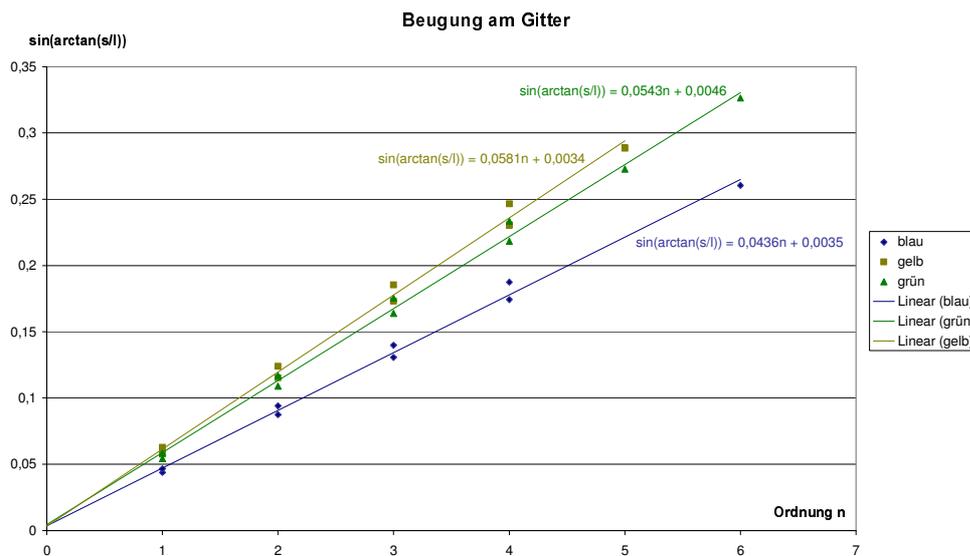
Der gesamte Versuch wurde zweimal mit verschiedenen Werten für  $l$  durchgeführt; für ein drittes mal war leider keine Zeit mehr. Dadurch sind unsere Regressionsgeraden evtl. mit etwas höheren statistischen Fehlern behaftet. Bei der zweiten Messung wurde nach Anleitung nur bis zur 4. Ordnung gemessen. Beim Vermessen der blauen Linien im ersten Durchlauf fiel auf, dass diese nicht wie die anderen Linien in erster Näherung äquidistant auf dem Papier erscheinen; zwischen der vierten und fünften Linie klafft eine Lücke, die ca. doppelt so groß ist wie erwartet. Wir schließen daraus, dass die fünfte Linie ein Maximum sechster Ordnung ist; das Maximum fünfter Ordnung wurde wohl durch andere Linien des Beugungsbildes verdeckt.

Jetzt aber zu den Messwerten und dem Diagramm, das für die verschiedenen Farben jeweils eine Regressionsgerade für  $\sin(\arctan(s/l))$  gegen  $n$  zeigt:

Messung 1								l1= 55,8		
Ordnung	Abstand s [cm]			sin(arctan(s/l))						
	blau	gelb	grün	blau	gelb	grün				
1	2,45	3,23	3,03	0,044	0,058	0,054				
2	4,90	6,48	6,13	0,087	0,115	0,109				
3	7,35	9,80	9,28	0,131	0,173	0,164				
4	9,88	13,23	12,48	0,174	0,231	0,218				
5		16,83	15,83		0,289	0,273				
6	15,05		19,28	0,260		0,326				

Messung 2								l2= 60,2		
Ordnung	Abstand s [cm]			sin(arctan(s/l))						
	blau	gelb	grün	blau	gelb	grün				
1	2,60	3,50	3,28	0,047	0,063	0,059				
2	5,28	6,98	6,58	0,094	0,124	0,117				
3	7,88	10,53	9,95	0,140	0,185	0,176				
4	10,65	14,20	13,40	0,187	0,247	0,234				



Das Diagramm zeigt zwar Unterschiede in den Werten für die beiden Messungen, jedoch liegen, wenn man einzelne Diagramme von den Messungen erstellt, die Werte für eine Farbe jeweils alle recht gut auf einer Geraden; dies lässt darauf schließen, dass die oben gemachte Annahme für die

fünfte blauen Linie in der ersten Messung richtig war und auch sonst keine groben Fehler vorliegen.

Die folgende Tabelle zeigt noch einmal genauer die Regressionsparameter und deren Fehler; diese wurden wieder mit der linearen Regressionsfunktion der Tabellenkalkulation berechnet.

Regression:								
blau	Steigung	Achsenabschn.	gelb	Steigung	Achsenabschn.	grün	Steigung	Achsenabschn.
Wert	0,0436	0,0035	Wert	0,0581	0,0034	Wert	0,0543	0,0046
stat. Fehler (Std.Abw.)	0,0012	0,0038	stat. Fehler	0,0017	0,0052	stat. Fehler	0,0012	0,0043

Man sieht, dass die Achsenabschnitte alle im Rahmen des jeweiligen statistischen Fehlers wie gewünscht gleich 0 sind, bis auf den für die „grüne“ Gerade. Das müsste letztendlich auf einen Offset im Wert für  $s/l$  zurückzuführen sein, wenn man die Fehlerbetrachtung mit der Kleinwinkelnäherung angeht, was laut Anleitung zulässig ist. Diesen können wir uns aber leider nicht durch einen eventuellen Fehler im Versuchsaufbau, sondern höchstens durch schlechtes Ablesen erklären; die weiter unten besprochenen systematischen Fehler für  $s$  sind nämlich so geartet, dass der Fehler von  $s/l$  für  $s/l$  gegen 0 ebenfalls gegen 0 gehen müsste. Eine systematische Korrektur des Achsenabschnittes durch Verschiebung aller Werte für  $\sin(\arctan(s/l))$  o.ä. wäre also nicht rechtfertigbar; wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Werte für die Steigung nicht allzu sehr vom Achsenabschnitt beeinflusst werden und beachten dessen Fehler nicht weiter.

Mit der eingangs gegebenen Beziehung für  $\lambda$  ergibt sich folgende Relation zwischen der Steigung der Regressionsgeraden  $m$  und der Wellenlänge  $\lambda$ :

$$\lambda = a \cdot m,$$

wo  $a$  die Gitterkonstante von  $10,00\mu\text{m}$  ist.

Es ergeben sich folgende Wellenlängen für die versch. Farben:

Blau: 436nm  
 Grün: 543nm  
 Gelb: 581nm

Die entsprechenden Literaturwerte sind 436nm, 546nm und 579nm. Die Fehler in der Messung sind also offensichtlich nicht besonders groß; dennoch wollen wir hier eine Fehlerrechnung durchführen.

Zunächst müssen wir neben dem durch Regression ermittelten statistischen Fehler jetzt den systematischen ermitteln. Für die Rechnungen gebrauchen wir nach Anleitung die einfachere Formel für  $\lambda$  mit Kleinwinkelnäherung:

$$\lambda = \frac{a}{n} \cdot \frac{s}{l} .$$

Auch hier würden bei der Fehlerfortpflanzung in den Wichtungsfaktoren Größen vorkommen, die nicht konstant sind; daher verwenden wir wieder wie oben den Satz, dass sich bei Produkten aus Messgrößen der gesamte relative systematische Fehler aus der Addition der relativen Einzelfehler systematischer Art ergibt.

Die in die Wellenlänge eingehenden, fehlerbehafteten Größen sind der Abstand zwischen Gitter und Schirm  $l$ , die Gitterkonstante  $a$ , und schließlich die Auslenkung  $s$ .



ten Verhältnisse unter einem anderen Beobachtungswinkel  $\alpha_{neu}$ , der so geartet ist, dass der gesamte Gangunterschied  $\Delta s_{ges,max,neu}$  dem Gangunterschied  $\Delta s$  von vorher gleich ist. Es gilt:  $\Delta s_{max,neu} = \alpha \cdot \alpha_{neu} + \alpha \cdot \alpha_K = \Delta s = \alpha \cdot \alpha \Rightarrow \alpha_{neu} = \alpha - \alpha_K$ . Das Beugungsbild dreht sich also in obiger Zeichnung in erster (Kleinwinkel-)Näherung um  $\alpha_K$  nach „oben“, d.h. vom Gitter zum Schirm gesehen nach links. Wäre der Schirm jetzt um  $\alpha_K$  nach links verdreht, so würde das Bild grob betrachtet jetzt wie vor der Verkippung der Lichtquelle sein. Also bildet sich bei nicht verdrehtem Schirm ein Bild auf dem Schirm aus, wie als ob nicht die Lichtquelle, sondern der Schirm selbst um  $\alpha_K$  nach rechts verdreht wäre.

Jetzt gehen wir zum realen Fall über: Lichtquelle und Schirm sind gerade, aber das Gitter ist nach rechts verdreht. Nun erscheint die Lichtquelle in der Bezugsebene des Gitters genauso wie oben im Bild, aber der Schirm erscheint gegenüber der Bezugsebene zusätzlich nach links verdreht (da ja das Gitter von außen gesehen nach rechts verdreht ist). Also sehen wir **in ganz grober Näherung keinen Effekt** durch die Verkippung des Gitters, wenn sie sich im Rahmen hält; hierauf haben wir im Versuch geachtet.

Also belassen wir es bei einem **Fehler für  $s$  von ca. 0,4%**.

Schlussendlich addieren sich die eruierten prozentualen systematischen Fehler zum prozentualen systematischen Gesamtfehler für  $\lambda$  wie besprochen zu:  $\Delta \lambda_{sys} = 1,5\%$ .

Das gibt uns die Möglichkeit, mit dem PC in einer Tabelle zuerst die systematischen Fehler je nach Wellenlänge getrennt zu berechnen sowie dann systematischen und statistischen Fehler zum jeweiligen Gesamtfehler zu addieren:

	blau	gelb	grün
Wellenlänge [nm]	436	581	543
sys. Fehler der Wellenlänge [nm]	7	9	8
stat. Fehler der Wellenlänge [nm]	12	17	12
Gesamtfehler $\Delta \lambda$ [nm]	18	25	21

Die statistischen Fehler sind vor allem für den Gelbanteil doch etwas größer als die systematischen; am ehesten zu vernachlässigen wäre noch der doch sehr kleine systematische Fehler für  $s$ ; allerdings: Die errechneten Fehler unterscheiden sich nicht etwa um mehrere Größenordnungen, so dass wir doch alle berücksichtigt haben.

Wenn wir die Messwerte nochmals den Literaturwerten von 436nm, 546nm und 579nm vergleichen, sehen wir jetzt handfest, dass die Ergebnisse im Rahmen der berechneten Fehlerschranken richtig sind.

### 2.3 Wellenlängenbestimmung am Prisma

Im letzten Teil des Versuches soll die Brechung an einem Prisma bzw. speziell die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge untersucht und zur Bestimmung einiger unbekannter Wellenlängen benutzt werden.

#### a) **Bestimmung des Winkels der brechenden Kante am Prisma**

Für alle weiteren Betrachtungen ist es notwendig, den Winkel  $\epsilon$  der brechenden Kante am Prisma zu kennen. Es handelt sich dabei um den Winkel zwischen den beiden polierten Seitenflächen. Um diesen Winkel zu messen, dreht man das Prisma mit der Brechkante in Richtung der Lichtquelle, so dass es an den beiden Seitenflächen zu einer Totalreflexion des Strahles kommt. Dann schwenkt man das Fernrohr jeweils so, dass der reflektierte Strahl im Fadenkreuz erscheint und

bestimmt den zugehörigen Winkel auf der Skala. Wie in der Anleitung beschrieben ist, ist die Differenz  $\alpha$  dieser beiden Winkel gerade der doppelte Winkel der brechenden Kante, also

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2}.$$

In unserem Versuch erhielten wir für die beiden total reflektierten Strahlen die Winkel  $7,5^\circ \pm 0,2^\circ$  bzw.  $127,4^\circ \pm 0,2^\circ$ . Daraus ergibt sich gerundet mit quadratischer Fehlerfortpflanzung (die Fehler der beiden Winkel sind statistisch unabhängig):

$$\varepsilon = 60,0^\circ \pm 0,1^\circ$$

(ungerundet:  $\pm 0,14^\circ$ )

### b) Bestimmung der Brechzahlen für verschiedene Wellenlängen

Wie in der Anleitung beschrieben wird, kann man bei bekannter Geometrie des Prismas aus dem Winkel der kleinsten Ablenkung eines (monochromatischen) Lichtstrahls den Brechungsindex des Prismenmaterials für die jeweilige Wellenlänge bestimmen. Es gilt der Zusammenhang

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Der Winkel der kleinsten Ablenkung  $\delta_{\min}$  wird dabei durch Drehen des Prismas bis zum Umkehrpunkt der wandernden Linie bestimmt (vgl. Anleitung). Man liest den zu diesem Punkt gehörigen Winkel  $\alpha_{\text{Umkehr}}$  auf der Skala ab und subtrahiert davon den Winkel, unter dem der ungebrochene Strahl (ohne Prisma) im Fadenkreuz des Fernrohrs erscheint ( $\alpha_{\text{Nullpunkt}}$ ). Dann gilt:

$$\delta_{\min} = \left| \alpha_{\text{Umkehr}} - \alpha_{\text{Nullpunkt}} \right|.$$

In Versuch wurden drei Linien der Hg-Lampe auf diese Weise vermessen. Die Ergebnisse können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden, in der auch bereits die zugehörigen Brechungsindizes (gemäß obiger Formel) sowie die Literaturwerte der Wellenlängen enthalten sind.

	$\lambda$ [nm]	$\alpha_{\text{Umkehr}}$ [°]	$\alpha_{\text{Nullpunkt}}$ [°]	$\delta_{\min}$ [°]	n
gelbe Hg-Linie	578,1	358,3	399,0	40,7	1,54
grüne Hg-Linie	546,1	358,6	310,0	48,6	1,62
blaue Hg-Linie	435,8	360,1	309,7	50,4	1,64

*Anmerkung: Bei der gelben Linie handelt es sich in Wirklichkeit nicht um eine einzelne Wellenlänge sondern um eine Doppellinie mit den Wellenlängen 579,1nm und 577nm mit vergleichbarer Intensität. Da diese Aufspaltung aber in unserem Versuch kaum erkennbar war, sind wir nur von einer Linie ausgegangen und verwenden daher als Literaturwert das arithmetische Mittel der beiden Wellenlängen.*

Kommen wir nun zur **Bestimmung des Fehlers** dieser Brechungsindizes. Offenbar sind sowohl der Winkel  $\varepsilon$  als auch der Winkel  $\delta_{\min}$  fehlerbehaftet.

Der **Fehler von  $\varepsilon$**  wurde oben bereits mit  $\Delta\varepsilon = \pm 0,14^\circ$  bestimmt.

Bei der Behandlung von  $\delta_{\min}$  gehen wir davon aus, dass Umkehr- und Nullpunktswinkel jeweils mit einem Fehler von  $\pm 0,2^\circ$  behaftet sind. Da diese Fehler statistisch unabhängig sind, pflanzen wir sie quadratisch fort und erhalten als Gesamtfehler  $\Delta\delta_{\min} = \pm 0,3^\circ$ .

Diese Fehler fassen wir nun durch lineare Fehlerfortpflanzung zum Gesamtfehler für den Brechungsindex zusammen (lineare Fortpflanzung deshalb, weil der Fehler für den nur anfangs einmalig gemessenen Winkel  $\varepsilon$  sich immer in die gleiche Richtung auswirkt):

$$\Delta n = \left| \frac{\partial n}{\partial \delta_{\min}} \cdot \Delta \delta_{\min} \right| + \left| \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon \right|$$

Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial n}{\partial \delta_{\min}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\cos\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2} \right)$$

Man beachte hierbei, dass in diesen Beziehungen alle Winkel im Bogenmaß eingesetzt werden müssen. Damit ergibt sich als Endergebnis (gerundete Werte):

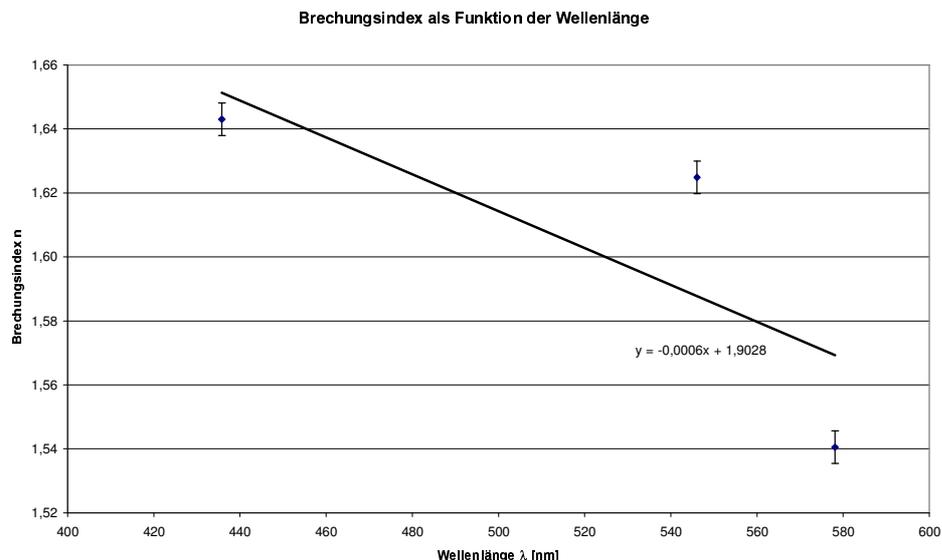
$$n(\lambda = 578,1 \text{ nm}) = 1,54 \pm 0,01 \quad (\text{exakt: } \pm 0,00506)$$

$$n(\lambda = 546,1 \text{ nm}) = 1,62 \pm 0,01 \quad (\text{exakt: } \pm 0,00509)$$

$$n(\lambda = 435,8 \text{ nm}) = 1,64 \pm 0,01 \quad (\text{exakt: } \pm 0,00510)$$

Der Fehler liegt erstaunlicherweise nach unserer Abschätzung lediglich in der Größenordnung des impliziten Fehlers.

Tragen wir nun den Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge graphisch auf, so ergibt sich folgendes Diagramm:



*Anmerkung: Für die Fehlerbalken wurden die oben angegebenen ungerundeten Werte verwendet.*

Man erkennt, dass sich innerhalb der Fehlertoleranzen nicht annähernd ein linearer Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und  $n$  nachweisen lässt. Hier liegt wohl ein grober Messfehler vor, wobei sich aber leider aus drei Punkten nicht entscheiden lässt, welcher Messwert falsch ist. Wir gehen da-

von aus, dass sich bei mindestens einer der Messungen auch die Skala (welche sich nicht richtig arretieren ließ) beim Bewegen des Fernrohrs mitgedreht hat, was völlig falsche Winkel liefert.

In der Anleitung wird allerdings gefordert, eine lineare Regression für die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex durchzuführen. Dies erfolgt durch die im Diagramm eingetragene Gerade, die der Gleichung

$$n = -0,0006 \cdot \frac{\lambda}{\text{nm}} + 1,9028$$

gehört. Um den letzten Aufgabenteil noch ausführen zu können, haben wir uns entschlossen, diese Gerade zu berechnen, auch wenn sie (wie man unten sehen wird) keine sinnvollen Ergebnisse liefert.

### c) Bestimmung unbekannter Wellenlängen

Mit dem aus b) bekannten Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Brechungsindex sollte nun noch abschließend die Wellenlänge dreier Linien einer „unbekannten“ Lampe bestimmt werden (deren Bekanntheitsgrad allerdings durch die gut sichtbare Aufschrift „Cadmium“ deutlich höher lag, als zunächst befürchtet ;-))

Zu diesem Zweck bestimmt man für die gesuchten Linien wieder zunächst den Winkel der kleinsten Ablenkung  $\delta_{\min}$  und errechnet daraus wie in b) den Brechungsindex des Materials.

Folgende Ergebnisse haben wir erhalten:

	$\alpha_{\text{Umkehr}} [^\circ]$	$\alpha_{\text{Nullpunkt}} [^\circ]$	$\delta_{\min} [^\circ]$	n
<b>rote Cd-Linie</b>	358,6	310,8	47,8	1,62
<b>grüne Cd-Linie</b>	359,1	310,0	49,1	1,63
<b>türkise Cd-Linie</b>	359,2	309,7	49,5	1,63

Aus den Brechungsindizes kann man nun durch einsetzen in die Gleichung der Regressionsgerade aus b) auf die Wellenlänge schließen:

$$\lambda = \frac{n - 1,9028}{-0,0006} \text{ nm}$$

Aus unseren Messwerten ergibt sich folgende Tabelle:

	n	$\lambda_{\text{mess}} [\text{nm}]$	$\lambda_{\text{Lit}} [\text{nm}]$
<b>rote Cd-Linie</b>	1,62	476,9	643,8
<b>grüne Cd-Linie</b>	1,63	454,7	508,6
<b>blau-grüne Cd-Linie</b>	1,63	448,0	480,0

Der Vergleich mit den Literaturwerten zeigt, dass die in b) bestimmte Gerade wie befürchtet keine sinnvollen weiteren Ergebnisse zu liefern vermag.

Des weiteren fällt auch auf, dass für die rote Cd-Linie ein deutlich zu hoher Wert für n entsteht (etwa vergleichbar mit dem Wert für die grüne Hg-Linie). Anscheinend liegt hier ein zweiter grober Messfehler vor, der aller Wahrscheinlichkeit nach wieder durch ein Mitdrehen der Skala beim Bewegen des Fernrohrs entstanden ist.

### 3. Beantwortung der Fragen

#### 3.1 Kohärenz

Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn zwischen ihnen eine feste Phasenbeziehung herrscht. Im Gegensatz dazu heißen Wellen inkohärent, wenn sich ihre Phasendifferenz zeitlich in zusammenhangloser Weise ändert.

Im Falle von Licht (also von harmonischen Wellen) ist es für Kohärenz notwendig, dass die Wellen gleiche Frequenz besitzen, da sonst die Phasenverschiebung niemals zeitunabhängig sein kann.

Allgemein kann man zwischen örtlicher und zeitlicher Kohärenz unterscheiden. Betrachtet man ein räumlich ausgedehntes Wellenfeld und leitet daraus an zwei verschiedenen Orten zwei Teilwellen ab, so spricht man von einem räumlich kohärenten Wellenfeld, wenn diese Teilwellen kohärent sind. Entsprechend heißt ein Wellenfeld (oder auch die Quelle desselben) zeitlich kohärent, wenn an einem beliebigen Punkt die Schwingungen zu verschiedenen Zeiten eine konstante Phase besitzen.

Unter der **Kohärenzlänge** versteht man die maximale Länge, auf der ein Wellenzug kohärent ist, d.h. man erhält (zum Beispiel für Licht) keine Kohärenz mehr, wenn man einen Strahlenschnitt betrachtet, der länger als die Kohärenzlänge ist.

Bezeichnet man die Kohärenzlänge mit  $l$ , so ist die **Kohärenzzeit**  $\tau$  definiert als

$$\tau = l/c,$$

wobei  $c$  die Phasengeschwindigkeit der Welle bezeichnet. Die Kohärenzzeit ist also die Zeit, die das Licht benötigt, um die Kohärenzlänge zurückzulegen.

#### 3.2 Monochromatisches und kohärentes Licht

Als monochromatisch wird Licht bezeichnet, dass praktisch ausschließlich aus Wellen einer bestimmten Frequenz (und damit Wellenlänge) besteht. Daraus folgt, dass monochromatisches Licht nicht notwendigerweise kohärent sein muss, denn es können ja durchaus mehrere Wellenzüge (gleicher Frequenz) von unterschiedlichen Quellen (z.B. unterschiedlichen Atomen innerhalb einer ausgedehnten Lichtquelle) ausgestrahlt werden, welche dann nicht kohärent sind. Umgekehrt allerdings muss kohärentes Licht stets monochromatisch sein, da sich natürlich nur in diesem Fall die erwähnte (siehe Frage 1) konstante Phasenbeziehung erreichen lässt.

#### 3.3 Auftreten von Beugungserscheinungen

Zu Beugungserscheinungen (d.h. zum Eintreten von Licht in den geometrischen Schattenraum) kann es nur dann kommen, wenn Licht durch Öffnungen oder auf Gegenstände trifft, deren Ausdehnung in der Größenordnung der Lichtwellenlänge liegt. Möchte man die durch die Beugung hervorgerufene Interferenz beobachten, so muss ferner kohärentes Licht verwendet werden, dessen Kohärenzlänge größer ist, als der Gangunterschied zwischen zwei potentiell interferierenden Strahlen.

#### 3.4 Lage von Gitter und zweiter Linse im Gitter-Versuch

Es ist sinnvoll, die zweite Linse nahe am Gitter zu haben, da dann das nach der zweiten Linse konvergierende Strahlenbündel einen möglichst großen Bereich des Gitters ausleuchtet.

### 3.5 Einfluss der Spaltbreite an der Lampe auf die Beugung am Gitter

Der dünne Spalt hat den Sinn, ein paralleles Strahlenbündel aus dem von der Lampe emittierten Licht auszuschneiden, das von einem möglichst kleinen Teil der Lichtquelle stammt. Das Licht einer Dampf Lampe ist im Normalfall inkohärent, da es aus Wellenzügen besteht, die von verschiedensten Oszillatoren (angeregten Atomen) ausgestrahlt werden, und diese Wellenzüge auch nicht besonders lang sind. Die Phasenbeziehungen zwischen den Wellenzügen, aus denen der emittierte Lichtschein besteht, schwanken also chaotisch; dauernd brechen Wellenzüge ab und kommen neue hinzu. Der Spalt verbessert nun die Kohärenz des Lichtes, da durch ihn die Anzahl verschiedener „Elementaroszillatoren“, die man von der ersten Linse aus sehen kann, vermindert wird. D.h. die erste Linse erhält nur noch einen Ausschnitt des Lichtes, das von der Lampe ausgesandt wird, und an der Emission dieses Ausschnittes sind so wenige (d.h. eigtl. schon einzelne) Oszillatoren beteiligt, dass die Kohärenz zumindest über ausreichend lange Zeitabschnitte / Wellenabschnitte gesichert ist. Daher können trotz der Inkohärenz des originalen Lampenlichts die Interferenzerscheinungen überhaupt scharf beobachtet werden; wird der Spalt erweitert, so werden die Erscheinungen zunächst unscharf und verschwinden schließlich ganz.

### 3.6 Warum keine Lupe zum Ablesen am Gitter?

Der Spalt ist ca. 10 mal so breit wie das Gitter. Wenn wir bei fester Wellenlänge vergleichen, wie groß also die Beobachtungswinkel  $\alpha$  sein werden, so ergibt ein Vergleich von Gleichung (3) und (4) der Anleitung, dass sich ganz grob abgeschätzt auch zehnmals so große Winkel ergeben. Außerdem ist durch die höhere Lichtstärke des Gitters (siehe nächste Frage) eine Beobachtung des Geschehens in einem größeren Abstand vom beugenden Element möglich, weshalb sich die Auslenkungen  $s$  dann nochmals nach Strahlensatz vergrößern. Durch das alles benötigt man beim Versuch mit dem Gitter keine Lupe.

### 3.7 Helligkeitsvergleich Spalt – Gitter

Beim Beugungsbild des Spaltes wird ein großer Prozentsatz der Helligkeit in das 0. Maximum investiert; der Rest der Maxima ist im Vergleich relativ dunkel. Beim Gitter-Beugungsbild hingegen haben alle Hauptmaxima einer Farbe (ohne Beachtung von Beugungseffekten der Einzelspalte) gleiche Helligkeit; das Beugungsbild des Gitters wird zwar dann von dem seiner Einzelspalte „überlagert“, so dass hier die Helligkeit des Beugungsbildes mit der Intensitätsverteilung eines Einfachspalt-Beugungsbildes moduliert ist; jedoch kann dieser Effekt durch eine entsprechend kleine Spaltbreite  $d$  des Gitters zu höheren Winkeln hin verdrängt werden; dies scheint im Versuch so der Fall gewesen zu sein, da die Helligkeitsmodulation nicht sichtbar war.

### 3.8 Diffus streuendes Papier

Zur Beobachtung des Gitter-Beugungsbildes verwendet man diffus streuendes Papier, da man die Banden nicht direkt mit dem Auge im Strahlengang durch völlig transparente Folie betrachtet wie beim Spalt (dies wäre relativ umständlich, wenn auch theoretisch möglich). Die Helligkeit des Beugungsbildes reicht hier vielmehr aus, um auf diffus streuendem Papier ein sichtbares Bild zu erzeugen, auch wenn das Papier durch die Streuung Intensität „vergischt“. Ein normales Papier würde die Linien nicht durchscheinen lassen, was zur Folge hätte, dass man die Linienpositionen im Strahlengang markieren müsste; dies wäre ebenfalls unvorteilhaft.

### 3.9 Geschwindigkeit von Licht in Glas

Da Glas optisch dichter ist, ist die Lichtgeschwindigkeit in Glas kleiner.

### 3.10 Brechung von Licht bei Eintritt in Glas

Wenn Licht in ein optisch dichteres Medium eintritt, so wird es zum Einfallslot hin gebrochen.

### 3.11 Winkel der minimalen Ablenkung beim Prisma

Sendet man Licht einer bestimmten Wellenlänge durch ein Prisma, so kommt es um einen Winkel  $\delta$  abgelenkt wieder heraus. Wie man sich denken kann, hängt dieser Ablenkungswinkel jedoch davon ab, in welchem Winkel das Licht ins Prisma eintritt. Wenn sich bei einem gewissen Eintrittswinkel ein genau gleich großer Austrittswinkel ergibt, so wird das Licht bei diesem und nur diesem Eintrittswinkel insgesamt minimal abgelenkt, d.h.  $\delta = \delta_{min}$  = Winkel der minimalen Ablenkung.

### 3.12 Dispersion

Dispersion ist die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge; diese ist je nach Medium verschieden. Ist die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig, so spricht man von einem dispersionsfreien Medium; wenn  $dv_{ph}/d\lambda < 0$  ist von einem Medium mit anomaler Dispersion, für  $dv_{ph}/d\lambda > 0$  spricht man von normaler Dispersion. Da der Brechungsindex eines Mediums unmittelbar von der Phasengeschwindigkeit einer Welle in dem Medium abhängt, ist der Brechungsindex bei dispersionsbehafteten Medien für verschiedene Wellenlängen verschieden.

### 3.13 Abhängigkeit der Auflösung eines Prismenspektrometers von der Dispersion (bei fester Geometrie)

Wie bereits erwähnt, bestimmt die Dispersionsrelation für das Prismenglas darüber, wie verschieden die Brechungsindizes des Glases für verschiedene Lichtwellenlängen sind. Wenn der Betrag von  $dv_{ph}/d\lambda$  also im Wellenlängenbereich des betrachteten Lichtes konstant recht groß ist, so sind auch die Brechungsindizes für die verschiedenen Wellenlängen recht verschieden, d.h. das Spektrometer löst gut auf, weil verschiedene Wellenlängen sehr verschieden stark gebrochen werden, also sehr verschieden große Ablenkungen erfahren. Ist umgekehrt  $dv_{ph}/d\lambda$  im betrachteten Wellenlängenbereich klein, so löst das Spektrometer nicht gut auf.