

Versuch: spez. Ladung d. Elektrons (28.5.2002)

Inhalt:

- | | | |
|----|------------------------------|---------|
| 1. | Einführung zum Versuch | Seite 1 |
| 2. | Messungen und Fehlerrechnung | Seite 2 |
| 3. | Beantwortung der Fragen | Seite 8 |

1. Einführung zum Versuch

Der vorliegende Versuch stellt eine von mehreren Möglichkeiten dar, das Verhältnis aus Ladung und Masse eines Elektrons, d.h. dessen spezifische Ladung, experimentell zu ermitteln.

Die Idee ist dabei – stark verkürzt – folgende: Im Vakuum treten Elektronen in einer kathodenstrahlröhrenähnlichen Anordnung aus einer Glühkathode aus und werden mittels eines elektrischen Feldes zur mittig durchbohrten Anode hin beschleunigt. Sie besitzen beim Durchtreten des Loches nun eine fest bekannte kinetische Energie $E_{kin}=e \cdot U$, wobei U die anliegende Beschleunigungsspannung und e die Elementarladung ist (die thermisch bedingte kinetische Energie der Elektronen beim Austreten aus dem Draht wird dabei vernachlässigt, da der Energiegewinn durch die Beschleunigung sehr groß gegenüber ihr ist). Nach dem Verlassen des elektrischen Feldes treten die Elektronen in ein genau senkrecht zu ihrer Bewegung gerichtetes, homogenes Magnetfeld ein, was zu einer Ablenkung auf eine Kreisbahn führt. Man beachte, dass auf der Kreisbahn die Energie der Elektronen durch die Bewegung im Magnetfeld nicht geändert wird (Der Vektor der Lorentzkraft steht stets senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor) sowie in diesem Vakuum auch keine Gasatome den Elektronenstrom bremsen. Auf der Kreisbahn der Elektronen ist nun der Betrag der Zentripetalkraft gleich dem der Lorentzkraft:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \Leftrightarrow \frac{m \cdot v}{r} = e \cdot B$$

Nun bleibt aber, wie erwähnt, die kinetische Energie der Elektronen nach dem Verlassen des E-Feldes konstant. Das heißt aber, dass wir im obigen Ausdruck v durch $\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}$, also die Geschwindigkeit beim Verlassen der Beschleunigungseinrichtung, ersetzen können. Damit erhalten wir:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}} = \sqrt{\left(\frac{r \cdot e \cdot B}{m}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot e \cdot U}{m} = \frac{r^2 \cdot e^2 \cdot B^2}{m^2} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot U}{r^2 \cdot B^2} = \frac{e}{m}$$

Dies liefert uns bei bekanntem Magnetfeld B das Versuchsergebnis.

Im reellen Experiment tauchen nun folgende Schwierigkeiten auf:

- Die Elektronenbahn muss sichtbar gemacht werden, um ihren Radius, der neben dem Magnetfeld und der Spannung in die Formel für e/m eingeht, messen zu können. Man baut dazu die gesamte Beschleunigungsanordnung so in einen mit niedrigem Druck gasgefüllten Glaskolben ein, dass den Elektronen im Kolben nach dem Austritt aus dem E-Feld noch genug Platz für eine Kreisbahn von ca. 15 cm Durchmesser bleibt. Der Anteil der Elektronen aus dem Strahl, der an Gasatome stößt, verursacht eine Fluoreszenzerscheinung entlang des Strahls. Zur näheren Wirkungsweise der Gasfüllung siehe Teil 3.3.
- Das magnetische Feld soll homogen sein und auf eine Weise erzeugt werden, die eine Bestimmung und Veränderung des Magnetfeldes möglichst einfach zulässt. Hierzu setzt man den Glaskolben zwischen zwei sogenannte Helmholtzspulen, die im Kolbenbereich ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugen. Das Magnetfeld ist, wie gefordert, senkrecht zur Ausschussrichtung der Beschleunigungsvorrichtung, wenn der Vektor der Ausschussgeschwindigkeit in der Spulenebene liegt. Es lässt sich durch den Spulenstrom näherungsweise nach folgendem Gesetz beeinflussen:

$$B_{\text{Helmholtzspulenpaar, Spulenchse}} = \mu_0 \cdot N \cdot \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + a^2)^{3/2}},$$

wobei hier noch N , die Windungszahl (130), der Spulenradius R (0,15m) und der Abstand a zwischen der Spulenebene und dem Punkt, in dem das Magnetfeld zu bestimmen ist, einzusetzen sind. Es ist zu bemerken, dass diese Formel für den Magnetfeldbetrag auf der Spulenchse gilt; für umliegende Bereiche ist sie eine Näherung.

Wenn man, wie in unserer Messanordnung, $a=R/2$ wählt, so vereinfacht sich die Formel zu:

$$B = \mu_0 \cdot N \cdot \frac{I \cdot R^2}{\left(R^2 + \frac{1}{4} R^2\right)^{3/2}} = \mu_0 \cdot N \cdot \frac{I}{R} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$$

2. Messungen und Fehlerrechnung

Es sollte nun für fünf verschiedene Beschleunigungsspannungen (150, 180, 210, 240, 300 V) bei einem Helmholtz-Spulenstrom von konstant 1.5A jeweils der Radius der Elektronenkreisbahn bestimmt und daraus mit den gegebenen Größen das Verhältnis e/m ermittelt werden. Das Messverfahren bringt jedoch statistische Fehler mit sich, weshalb für jede Beschleunigungsspannung jeweils fünf mal gemessen werden soll.

Wie findet nun so ein Messvorgang für den Radius im Einzelnen statt? Zunächst muss kontrolliert werden, ob die Beschleunigungsspannung sowie der Spulenstrom stimmen. Der Wehneltzylinder, der den Strahl fokussiert, war bei uns bei jeder Messung auf höchstmögliche negative Spannung eingestellt, da das den Strahl am dünnsten werden ließ. Dann geht es an die Radiusmessung. Hierzu steht ca. 20 cm hinter der Röhre ein vertikaler Spiegel parallel zur Spulenebene, d.h. auch parallel zur Ebene, in der die Elektronen-Kreisbahn liegt, sowie zwischen Röhre und Spiegel noch eine Art Stand-Schieblehre, d.h. ein vertikales Eisenprofil mit Skala, auf dem ein Eisenwinkel inkl. dazu passender Noniusskala vertikal vergeschoben werden kann. Die horizontal vom Profil abstehende Kante des Eisenwinkels, die auf die zu messende Höhe eingestellt werden soll,

kann von unten mittels einer dimmbaren Sofittenlampe beleuchtet werden, um sie auch bei Verdunkelung des Raumes sichtbar zu machen. Die Strategie ist nun, die Höhe des unteren und oberen Kreisendes auf der Skala zu bestimmen und durch Differenzbildung dieser beiden Werte die „Kreishöhe“ (Durchmesser) zu bekommen. Die zu messenden Werte erhält man, indem man abdunkelt, dann zum Verhindern eines etwaigen Parallaxenfehlers mit einem Auge so auf die Röhre schaut, dass sich die Leuchterscheinung des Strahls mit ihrem Spiegelbild an der zu messenden Stelle (d.h. ganz oben bzw. ganz unten) deckt und schließlich von oben so das Profil hinabschiebt, dass seine beleuchtete Kante sich ebenfalls in derselben Höhe wie die Leuchterscheinung (d.h. möglichst der Mitte des „blauen Strahls“) befindet. Dann schaltet man das Licht im Zimmer an und liest den Wert mittels des Nonius genau ab. Es ist sinnvoll, dass man immer abwechselnd abliest und dass während des Ablesevorgangs jeweils der, der gerade nicht abliest, die Augen schließt, denn nur wenn die Augen an die Dunkelheit gewöhnt sind, kann man die Höhe präzise ermitteln.

Wir errechnen alsdann für jede der 25 Einzelmessungen den e/m -Wert aus dem Radius, der Beschleunigungsspannung und dem Magnetfeld (welches sich mit der oben angegebenen Formel aus dem Spulenstrom und den Daten des Messaufbaus errechnen lässt). Auch wird für jede der fünf Spannungen der Mittelwert aus den jeweils in den einzelnen fünf Messungen erhaltenen Radien und der aus den entsprechenden e/m -Resultaten bestimmt. Die fünf erhaltenen e/m -Mittelwerte sollen schlussendlich je nach Signifikanz (d.h. je nach Genauigkeit) gewichtet und zu einem gewichteten Gesamtmittelwert für e/m addiert werden. Um Aussagen sowohl über diese Signifikanz als auch über die Genauigkeit des gewichteten Gesamtmittelwertes zu treffen, ist ein etwas höherer Aufwand an Fehlerrechnung vonnöten.

Vorgehen bei der (analytischen) Fehlerrechnung und Verfahren der gewichteten Mittelwertbildung für das Gesamtergebnis:

- Zunächst wird für jede der Spannungen der Mittelwert aus den je fünf Radiusmessungen und den je fünf e/m -Resultaten errechnet.
- Dann muss jeweils für r und für e/m die Summe der quadrierten Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert gebildet werden, welche dann durch 4 (d.h. Versuchsanzahl (n) minus eins) geteilt das Quadrat der Standardabweichung s ergibt:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- Aus der Standardabweichung errechnet sich der statistische Fehler des Mittelwerts von r bzw. e/m für jede Spannung nach folgender Formel:

$$\Delta\bar{x} = s \frac{t(n, 1-k)}{\sqrt{n}} \quad \text{wobei } t \text{ die Studentfunktion und } k \text{ das Konfidenzniveau ist.}$$

Die Studentfunktion für ein Konfidenzniveau von 99% (dieses wurde willkürlich gewählt; mit diesem Niveau ist sehr sicher, dass ein Mittelwert im angegebenen Fehlerbereich auch wirklich liegt, und das wollen wir ja) sowie eine Versuchsanzahl n von 5 ist gleich 4,60.

- Nun ist, bevor die Wichtung der Mittelwerte für versch. Spannungen und das Zusammenrechnen zu einem Endwert vorgenommen werden kann, noch der systematische Fehler der einzelnen Mittelwerte auszurechnen. Hierbei gibt es mehrere Fehlerquellen. Einerseits ergibt sich ein **Spannungsfehler für die Beschleunigungsspannung**, der sich aus dem Ablesefeh-

ler am Messgerät (ca. +/- 0,2 Skt., das entspr. +/-2V) sowie einem herstellerseitigen Anzeigefehler des Messgerätes (+/- 2,5% vom Skalenendwert 300V, das sind +/-7,5V) durch lineare Addition (syst. Fehler!) zu +/-9,5V errechnet. Andererseits ist auch der Messwert für den **Strom durch die Spulen** mit einem Ablesefehler von ca. +/-0,2 Skt. (entspr. +/-0,02A) sowie einem Anzeigefehler von +/-2% vom Skalenendwert 2,5A (d.h. +/-0,05 A) behaftet, was linear addiert wiederum einen **Stromfehler von +/-0,07A** ergibt. Des weiteren ärgert uns noch die Strahldicke, die durch Defokussierung etc. zustande kommt. Sie kann zu einer systematischen Falschmessung des Radius führen, wobei der Fehler ca. der Strahldicke von ungefähr +/-1,5 mm gleich kommt. Da pro Messung zwei Ablesungen (oberes und unteres Kreisende) nötig sind, ergibt sich der Gesamtfehler für den Radius zu +/-3mm (lineare Addition der zwei syst. Einzelfehler von je +/-1,5mm).

Der gesamte systematische Fehler für eine Einzelmessung von e/m ergibt sich dann mit

$$\frac{e}{m} = \frac{U \cdot R^2 \cdot 5^3}{\mu_0^2 \cdot 2^5 \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot r^2}$$

(hier ist der Term für das Magnetfeld schon eingesetzt) und linearer Fortpflanzung der Einzelfehler zu:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{e}{m} \right)_{\text{syst}} &= \left| \frac{\partial \left(\frac{e}{m} \right)}{\partial U} \Delta U_{\text{sys}} \right| + \left| \frac{\partial \left(\frac{e}{m} \right)}{\partial I} \Delta I_{\text{sys}} \right| + \left| \frac{\partial \left(\frac{e}{m} \right)}{\partial r} \Delta r_{\text{sys}} \right| = \\ &= \left| \frac{\Delta U_{\text{sys}} \cdot R^2 \cdot 5^3}{\mu_0^2 \cdot 2^5 \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot r^2} \right| + \left| \frac{U \cdot R^2 \cdot 5^3 \cdot (-2) \cdot \Delta I_{\text{sys}}}{\mu_0^2 \cdot 2^5 \cdot N^2 \cdot r^2 \cdot I^3} \right| + \left| \frac{U \cdot R^2 \cdot 5^3 \cdot (-2) \cdot \Delta r_{\text{sys}}}{\mu_0^2 \cdot 2^5 \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot r^3} \right| \end{aligned}$$

Der systematische Fehler eines e/m -Mittelwertes für eine Spannung ist dann nach linearem Fehlerfortpflanzungsgesetz der Mittelwert der Einzelfehler, die in den e/m -Mittelwert eingegangen sind.

- Die statistischen und systematischen Fehler für die e/m -Mittelwerte für jede Spannung können nun jeweils (nach Fehlerrechnungs-Vorlesung) linear zum Gesamtfehler des e/m -Mittelwertes für jede Spannung addiert werden.
- Nun wird eine gewichtete Mittelwertbildung über die jeweiligen e/m -Mittelwerte für alle Spannungen durchgeführt. Die Formel für einen gewichteten Mittelwert einer Messgröße x ist:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i},$$

wobei w_i die Wichtungsfaktoren mit $w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$ über die Fehler der einzurechnenden Einzelwerte gegeben sind.

Der Fehler des gewichteten Mittelwertes errechnet sich dann relativ einfach durch:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$$

was das Ende unserer Untersuchung darstellen wird.

Wichtig ist die Voraussetzung für die gewichtete Mittelwertbildung: Je zwei der eingehenden Einzelwerte dürfen höchstens um den Betrag ihrer zueinander linear addierten jeweiligen Gesamtfehler auseinanderliegen. Bei uns wird nach Verifizierung dieser Voraussetzung der gewichtete Mittelwert aus den fünf Mittelwerten für e/m (versch. Spannungen) gebildet. Um die Fehler der in den gew. MW einzurechnenden (Mittel-)Werte für die Wichtung und Überprüfung der Vor. zu erhalten, addiert man linear den stat. Fehler des jeweiligen (Mittel-)Wertes mit dem systematischen.

Die gesamten aufgezählten Rechnungen wurden in folgender Tabelle ausgeführt. Man sieht in ihr auch leicht, dass obige Voraussetzung für gewichtete Mittelwertbildung erfüllt ist.

U/Volt: 1,5E+02		Magnetfeld(=1,5 A)/Tesla: 1,2E-03				
oben/m	unten/m	Radius/m	quadrat. Abw. r	e/m	quadr. Abw. e/m	sys. F. e/m
0,19360	0,12435	0,03463	7,2E-09	1,8E+11	8,2E+17	6,0E+10
0,19415	0,12485	0,03465	1,2E-08	1,8E+11	1,4E+18	6,0E+10
0,19320	0,12425	0,03448	4,2E-09	1,8E+11	4,8E+17	6,1E+10
0,19325	0,12445	0,03440	2,0E-08	1,9E+11	2,2E+18	6,1E+10
0,19285	0,12375	0,03455	1,0E-10	1,8E+11	1,2E+16	6,1E+10
Mittelwert r:		3,5E-02		Mittelwert e/m:		1,8E+11
Standardabweichung r:		1,0E-04		Standardabweichung e/m:		1,1E+09
stat. Fehler d. Mittelw. für r:		2,1E-04		stat. Fehler d. Mittelw. für e/m:		2,3E+09
syst. Fehler Strom/A:		0,07		syst. Fehler d. Mittelw. f. e/m:		6,1E+10
syst. Fehler Beschl.spg./V:		9,5E+00		Wichtungsfaktor für Gesamt-MW:		2,5E-22
syst. Fehler Radius (Str.dicke)/m:		3,0E-03				

U/Volt: 1,8E+02		Magnetfeld(=1,5 A)/Tesla: 1,2E-03				
oben/m	unten/m	Radius/m	quadrat. Abw. r	e/m	quadr. Abw. e/m	sys. F. e/m
0,19650	0,12195	0,03728	2,5E-07	1,9E+11	2,4E+19	5,8E+10
0,19745	0,12075	0,03835	3,4E-07	1,8E+11	3,1E+19	5,4E+10
0,19630	0,12090	0,03770	4,9E-09	1,9E+11	4,0E+17	5,7E+10
0,19635	0,12135	0,03750	7,3E-08	1,9E+11	6,8E+18	5,7E+10
0,19685	0,12080	0,03803	6,5E-08	1,8E+11	6,4E+18	5,5E+10
Mittelwert r:		3,8E-02		Mittelwert e/m:		1,8E+11
Standardabweichung r:		4,3E-04		Standardabweichung e/m:		4,1E+09
stat. Fehler d. Mittelw. für r:		8,8E-04		stat. Fehler d. Mittelw. für e/m:		8,5E+09
syst. Fehler Strom/B.Spg./Radius:		s.o.		syst. Fehler d. Mittelw. f. e/m:		5,6E+10
				Wichtungsfaktor für Gesamt-MW:		2,4E-22

U/Volt: 2,1E+02		Magnetfeld(=1,5 A)/Tesla: 1,2E-03				
oben/m	unten/m	Radius/m	quadrat. Abw. r	e/m	quadr. Abw. e/m	sys. F. e/m
0,20015	0,11795	0,04110	1,4E-07	1,8E+11	1,1E+19	5,2E+10
0,19935	0,11765	0,04085	1,4E-08	1,8E+11	1,2E+18	5,3E+10
0,20025	0,11880	0,04073	2,5E-11	1,9E+11	3,3E+14	5,3E+10
0,19945	0,11795	0,04075	4,0E-10	1,9E+11	4,4E+16	5,3E+10
0,19945	0,11900	0,04023	2,6E-07	1,9E+11	2,2E+19	5,5E+10
Mittelwert r:		4,1E-02		Mittelwert e/m:		1,9E+11
Standardabweichung r:		3,2E-04		Standardabweichung e/m:		2,9E+09
stat. Fehler d. Mittelw. für r:		6,6E-04		stat. Fehler d. Mittelw. für e/m:		6,0E+09
syst. Fehler Strom/B.Spg./Radius:		s.o.		syst. Fehler d. Mittelw. f. e/m:		5,3E+10
				Wichtungsfaktor für Gesamt-MW:		2,9E-22

U/Volt: 2,4E+02		Magnetfeld(=1,5 A)/Tesla: 1,2E-03				
oben/m	unten/m	Radius/m	quadrat. Abw. r	e/m	quadr. Abw. e/m	sys. F. e/m
0,20240	0,11535	0,04353	6,4E-09	1,9E+11	5,2E+17	5,0E+10
0,20230	0,11545	0,04343	4,0E-10	1,9E+11	1,7E+16	5,1E+10
0,20155	0,11595	0,04280	4,2E-07	1,9E+11	3,1E+19	5,2E+10
0,20220	0,11515	0,04353	6,4E-09	1,9E+11	5,2E+17	5,0E+10
0,20290	0,11500	0,04395	2,6E-07	1,8E+11	1,8E+19	4,9E+10
Mittelwert r:		4,3E-02		Mittelwert e/m:		1,9E+11
Standardabweichung r:		4,1E-04		Standardabweichung e/m:		3,6E+09
stat. Fehler d. Mittelw. für r:		8,5E-04		stat. Fehler d. Mittelw. für e/m:		7,3E+09
syst. Fehler Strom/B.Spg./Radius:		s.o.		syst. Fehler d. Mittelw. f. e/m:		5,0E+10
				Wichtungsfaktor für Gesamt-MW:		3,0E-22

U/Volt: 3,0E+02		Magnetfeld(=1,5 A)/Tesla: 1,2E-03				
oben/m	unten/m	Radius/m	quadrat. Abw. r	e/m	quadr. Abw. e/m	sys. F. e/m
0,20715	0,10960	0,04878	2,4E-08	1,8E+11	1,5E+18	4,6E+10
0,20715	0,11050	0,04833	8,7E-08	1,9E+11	4,9E+18	4,7E+10
0,20810	0,10925	0,04943	6,5E-07	1,8E+11	3,7E+19	4,4E+10
0,20680	0,10980	0,04850	1,4E-08	1,9E+11	7,6E+17	4,6E+10
0,20650	0,11035	0,04808	3,0E-07	1,9E+11	1,8E+19	4,7E+10
Mittelwert r:		4,9E-02		Mittelwert e/m:		1,9E+11
Standardabweichung r:		5,2E-04		Standardabweichung e/m:		3,9E+09
stat. Fehler d. Mittelw. für r:		1,1E-03		stat. Fehler d. Mittelw. für e/m:		8,1E+09
syst. Fehler Strom/B.Spg./Radius:		s.o.		syst. Fehler d. Mittelw. f. e/m:		4,6E+10
				Wichtungsfaktor für Gesamt-MW:		3,4E-22

insgesamter gewichteter Mittelwert d. e/m-Mittelwerte: 1,9E+11 Fehler hierzu: 2,7E+10

Hier vielleicht noch ein paar Worte zur Anzahl gültiger Ziffern für die Tabellenwerte: Die „oben“-/„unten“-Werte für die Radiusbestimmung sowie der daraus errechnete durch 2 geteilte Differenzwert (Radius) wurden in der im Praktikumsheft aufgezeichneten Genauigkeit übernommen. Man leite hieraus keine Signifikanzaussage für die hinteren Stellen dieser Werte ab! Alle weiteren berechneten Werte wurden dann auch so formatiert, dass ihre Genauigkeit sinnvoll im Bezug auf die errechneten/festgestellten Fehler (siehe weiter oben) ist, d.h. auf 2 gültige Stellen.

Die Möglichkeit einer grafischen Auswertung

Ursprünglich wird in der Versuchsanleitung gefordert, die Auswertung der Messergebnisse grafisch durchzuführen. Unser Betreuer riet uns jedoch zu einer in erster Linie analytischen Betrachtung der Messung und der Fehler, wie oben ausgeführt. Im folgenden soll nun daher nur knapp auf die Vorgehensweise bei der grafischen Betrachtung eingegangen werden: Zunächst stellt man dazu die bereits oben genannte Beziehung zur Berechnung von e/m wie folgt um:

$$U = \frac{e}{m} \cdot \frac{B^2 r^2}{2} =: \frac{e}{m} \cdot a$$

Daraus ist ersichtlich, dass man eine Ursprungsgerade erhalten sollte, wenn man U gegen $a := \frac{B^2 r^2}{2}$ aufträgt. Die Steigung dieser Gerade ist dann die gesuchte spez. Ladung.

In der Praxis kann man nun nicht erwarten, dass man exakt eine Gerade erhält. Vielmehr sind alle gemessenen Größen (wie oben beschrieben) mit Fehlern behaftet. Wir wollen daher versuchen, eine Regressionsgerade zu bestimmen, deren Steigung uns einen Wert für e/m liefert und anschließend anhand von geeigneten Fehlerbalken zwei weitere Ursprungsgeraden in das Diagramm einzufügen (eine mit minimal möglicher und eine mit maximal möglicher Steigung), die uns einen Toleranzbereich für e/m angeben.

Zunächst einige Überlegungen zu den benötigten Fehlerbalken:

- **In y-Richtung:**
Der Fehler der Spannung U beträgt wie beschrieben für alle Punkte im Diagramm $\pm 9,5V$.
- **In x-Richtung:**
Hier ist etwas mehr Aufwand notwendig, da sich der Fehler von a aus einer statistischen und einer systematischen Komponente zusammensetzt.

Zur **statistischen Komponente** trägt nur der statistische Fehleranteil von r bei (welcher für jede der fünf Spannungen aus obiger Tabelle entnommen werden kann). Es ergibt sich also:

$$\Delta a_{stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial r} \cdot \Delta r_{stat}\right)^2} = B^2 \cdot r \cdot \Delta r_{stat}$$

B wurde bereits oben errechnet und für r ist bei jeder Spannung der jeweilige Radius-Mittelwert aus der Tabelle zu verwenden.

Für die **systematische Komponente** sind nun noch der systematische Fehler von r und der ebenfalls systematische Fehler des Spulenstromes zu beachten, welcher in die Größe B eingeht. Man erhält nach dem Einsetzen der schon genannten Gleichung für die Magnetfeldstärke innerhalb der Helmholtzspulen und mit linearer Addition (wg. sys. Fehler):

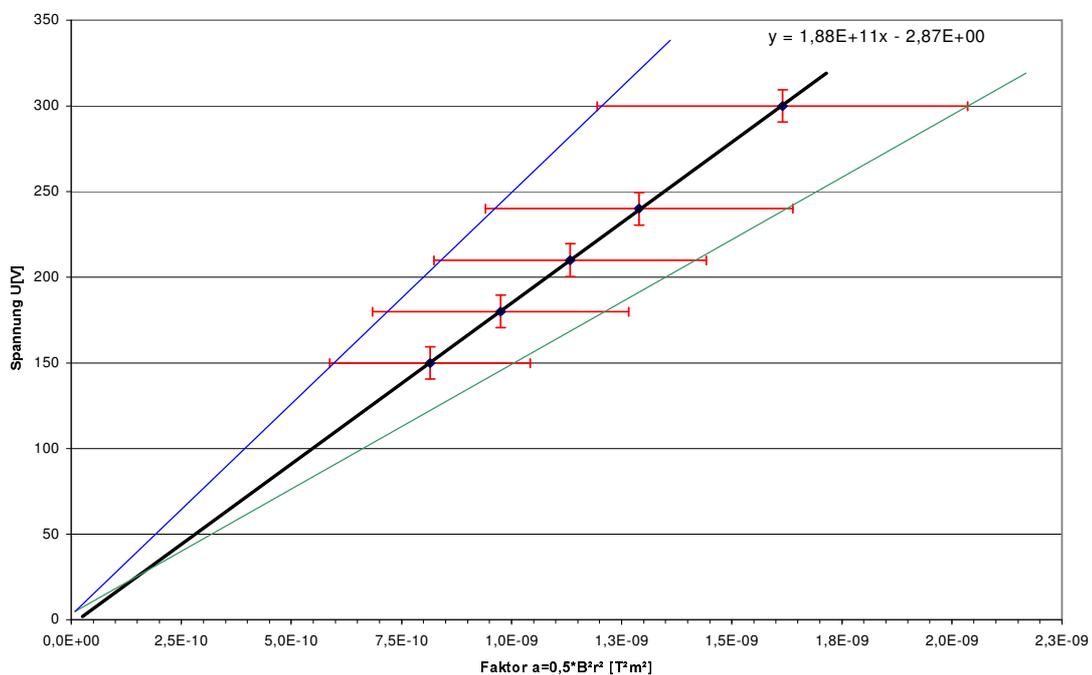
$$\Delta a_{sys} = \left| \frac{\partial a}{\partial r} \cdot \Delta r_{sys} \right| + \left| \frac{\partial a}{\partial I} \cdot \Delta I_{sys} \right| = B^2 \cdot r \cdot \Delta r_{sys} + \frac{\mu_0^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot N^2 \cdot r^2 \cdot I}{R^2} \cdot \Delta I_{sys}$$

Schlussendlich kann aus obigem durch lineare Addition des systematischen und des statistischen Anteils ein Gesamtfehler von a bestimmt werden, der Grundlage für die Fehlerbalken in x -Richtung ist. Die entsprechenden Werte lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Spannung U [V]	1,5E+02	1,8E+02	2,1E+02	2,4E+02	3,0E+02
Fehler U [V]	9,5E+00	9,5E+00	9,5E+00	9,5E+00	9,5E+00
Faktor a [T^2m^2]:	8,2E-10	9,7E-10	1,1E-09	1,3E-09	1,6E-09
Fehler a_{sys} [T^2m^2]	2,2E-10	2,5E-10	2,7E-10	3,0E-10	3,5E-10
Fehler a_{stat} [T^2m^2]	1,0E-11	4,5E-11	3,7E-11	5,1E-11	7,1E-11
Fehler a_{ges} [T^2m^2]	2,3E-10	2,9E-10	3,1E-10	3,5E-10	4,2E-10

Nun kann endlich die grafische Auftragung erfolgen:

Grafische Bestimmung von e/m



Aus dem Diagramm erkennt man, dass die Punkte in sehr guter Näherung auf der vom Tabellenkalkulationsprogramm berechneten Regressionsgeraden liegen (hier schwarz eingetragen). Für sie gilt die angegebene Geradengleichung, aus der man sofort den gesuchten Wert

$$\frac{e}{m} = 1,88 \cdot 10^{11} \text{ Ckg}^{-1}$$

erhält (die Gerade wurde in Richtung des Nullpunktes extrapoliert, um zu zeigen, dass sie praktisch durch den Ursprung verläuft).

Außerdem wurden manuell die erwähnten Geraden mit minimaler (grün) und mit maximaler (blau) Steigung eingetragen. Eine einfache Betrachtung über ein Steigungsdreieck liefert:

$$\left(\frac{e}{m}\right)_{\min} \approx 1,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{e}{m}\right)_{\max} \approx 2,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Somit gelangen wir auf diesem Weg grob zu einer spezifischen Ladung von:

$$\frac{e}{m} = 1,9 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \begin{cases} +0,6 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \\ -0,5 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \end{cases}$$

3. Beantwortung der Fragen

3.1 Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Elektronenladung

Es existieren eine ganze Reihe von Verfahren, mit denen sich die spezifische Ladung von Elektronen ermitteln lässt. Viele davon basieren auf der Ablenkung von bewegten Elektronen in Magnetfeldern und der Messung des Radius' der sich ergebenden Kreisbahn. Diese Verfahren unterscheiden sich zwar im Detail von dem im Praktikum durchgeführten (etwa in der Anordnung der Felder und in der Registrierung der Elektronen, z.B. auf einem Fluoreszenzschirm statt durch Lichtemission angeregter Gasatome), die Grundidee ist aber sehr ähnlich. Daher wollen wir bei dieser Aufgabe darauf verzichten, weitere Beispiele solcher Anordnungen anzugeben. Statt dessen seien einige Verfahren aufgezählt, die sich von unserem zumindest in einem wichtigen Punkt unterscheiden (wobei natürlich Ähnlichkeiten untereinander immer zu finden sind):

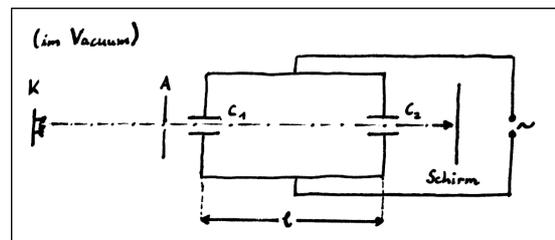
- **Das Zyklotron**

Ein Zyklotron ist ein Teilchenbeschleuniger, in dem geladene Teilchen (also auch Elektronen) durch ein elektrisches Feld beschleunigt und durch ein Magnetfeld auf eine Kreisbahn gezwungen werden (die genaue Funktionsweise wurde in der Experimentalphysikvorlesung besprochen). Die Besonderheit liegt nun darin, dass die Umlauffrequenz ν der Teilchen unabhängig von der Teilchengeschwindigkeit ist, weil mit der Geschwindigkeit auch der Bahnradius ansteigt. Eine entsprechende Rechnung ergibt $\nu = \frac{q}{m} \cdot \frac{B}{2\pi}$ (q : Ladung des Teilchens, m : seine Masse, B : magnetische Flussdichte). Ist B bekannt und gelingt es, die Umlauffrequenz des Teilchens zu messen, so kann daraus die spezifische Ladung $\frac{q}{m}$ bestimmt werden.

- **Beschleunigung von Elektronen**

Eine andere Möglichkeit zur Messung von e/m besteht darin, im Vakuum Elektronen durch eine bekannte Potentialdifferenz (nichtrelativistisch) zu beschleunigen und anschließend ihre Geschwindigkeit zu messen. Über die bekannte Beziehung $v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U}$ (mit U : Beschleunigungsspannung und v : Geschwindigkeit) erhält man daraus die spezifische Ladung.

Zur Messung der Geschwindigkeit kann z.B. die hier abgebildete Anordnung verwendet werden: Darin passieren die Elektronen mit der zu messenden Geschwindigkeit nacheinander zwei Kondensatoren C_1 und C_2 , an denen dieselbe hochfrequente Wechselspannung anliegt. Sie können die Anordnung nur dann geradlinig durchfliegen und auf den Schirm treffen, wenn sie in keinem der beiden Kondensatoren abgelenkt werden, also wenn am jeweiligen Kondensator im Moment des Durchfliegens die Spannung gerade Null ist. Für eine feste Geschwindigkeit ist dies genau bei einer bestimmten Wechselspannungsfrequenz der Fall (die vom Abstand zwischen den beiden Kondensatoren abhängt). Man re-

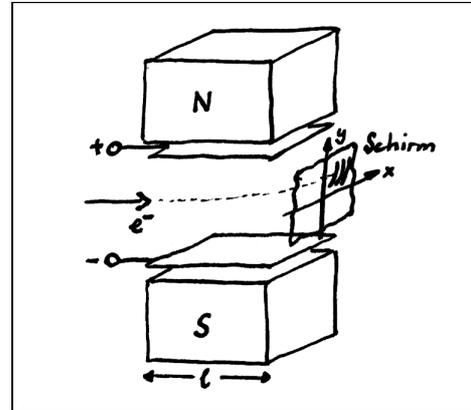


gelt also die Frequenz so ein, dass der Strahl die Anordnung durchquert und bestimmt daraus und aus der Geometrie des Aufbaus (Abstand l) die Geschwindigkeit der Elektronen.

- **Massenspektrograph**

Ein Massenspektrograph ist ein Gerät zur Bestimmung der spezifischen Ladung von Teilchen. Dabei sind verschiedene Anordnungen im Vakuum gebräuchlich, von denen wir eine vorstellen wollen:

Die Teilchen (z.B. Elektronen) werden beschleunigt und treten in einen Raum ein, in dem ein elektrisches und ein dazu paralleles Magnetfeld herrschen. Entsprechend erfolgt sowohl in x - als auch in y -Richtung eine Ablenkung (siehe Bild). Man kann berechnen, dass alle Teilchen mit gleicher spezifischer Ladung auf einem Parabelast am Fluoreszenzschirm auftreffen (nicht in einem Punkt, da keine identische Eintrittsgeschwindigkeit in die Felder vorausgesetzt ist). In die Gleichung dieser Parabel gehen außer der spez. Ladung der Teilchen nur die Parameter der Anordnung ein (Feldstärken und Abmessungen). Daher kann daraus die gesuchte Größe e/m errechnet werden.



- **Kathodenstrahlröhre, Versuch von Thomson**

Bei dieser Methode werden Elektronen durch eine bekannte Spannung beschleunigt und anschließend in einem homogenen E-Feld, dessen Richtung auf der Flugrichtung beim Eintritt senkrecht steht, abgelenkt (die Bestimmung der Geschwindigkeit kann statt über die Potentialdifferenz zuverlässiger auch mit einem Wienschen Geschwindigkeitsfilter erfolgen). Aus der Ablenkung und der Geometrie der Anordnung lässt sich dann die spez. Ladung der Elektronen bestimmen. Die gesamte Anordnung befindet sich dabei selbstverständlich in einer evakuierten Röhre und die Messung der Ablenkung erfolgt durch einen Fluoreszenzschirm, der hinter dem Ablenkbereich angebracht ist.

Weiterhin existieren eine Reihe weiterer Verfahren, die wir hier nicht besprechen können, weil sie den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengen würden oder weil uns die physikalischen Grundlagen dazu noch nicht zur Verfügung stehen. Dazu gehört etwa die e/m -Bestimmung über den **Zeeman-Effekt**. Dabei nutzt man aus, dass sich die Spektrallinien von Atomen unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes aufspalten, wobei man über die Größe dieser Aufspaltung e/m berechnen kann. Ein anderes Beispiel wäre die **Methode von Busch**. Hierbei erfolgt die Bestimmung der spezifischen Ladung in einer evakuierten Röhre über die elektronenoptische Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern.

3.2 Spiralbahnen

Wenn die Geschwindigkeit \vec{v} der Elektronen nicht senkrecht auf der Richtung des Magnetfeldes \vec{B} steht, so erhält man statt einer Kreis- eine Spiralbahn. Dies liegt daran, dass \vec{v} dann sowohl eine Komponente \vec{v}_\perp senkrecht zum Magnetfeld als auch eine Komponente \vec{v}_\parallel parallel dazu besitzt. Für die Lorentzkraft geht nun nur die senkrechte Komponente ein, wobei die Kraft wiederum auf dieser (und auf dem B -Feldvektor) senkrecht steht. Damit würde sich die gewohnte Kreisbahn ergeben, wenn keine weitere Geschwindigkeitskomponente existieren würde. \vec{v}_\parallel führt aber nun zu einer von der Lorentzkraft unbeeinflussten (und folglich mit konstanter Geschwindigkeit er-

folgenden) Translation der Elektronen in Richtung (bzw. Gegenrichtung) des B-Feldes, die sich mit der Kreisbewegung ungestört überlagert. Daher wird aus dem Kreis eine spiralförmige Bahn. Diesen Effekt beobachtet man im Praktikum, wenn man das Fadenstrahlrohr entlang seiner Längsachse in der Halterung verdreht, so dass die Elektronen nicht mehr senkrecht zum Feld in den Glaskolben eingeschossen werden.

3.3 Sichtbarkeit der Elektronenbahnen

Der Elektronenstrahl ist nur deswegen überhaupt sichtbar, weil der Glaskolben nicht vollständig evakuiert ist, sondern Wasserstoff bei einem Druck von etwa 1,33Pa enthält. Daher stoßen Elektronen gegen Wasserstoffatome und können diese anregen, d.h. ein Hüllenelektron in eine höhere und damit energiereichere Schale heben. Nach kurzer Zeit fällt dieses oder ein anderes Elektron aber (evtl. über Zwischenzustände) in seine ursprüngliche Schale zurück (dort befindet sich ja nun ein Loch) und das Atom geht wieder in einen Zustand niedriger Energie über. Es werden dabei Lichtquanten ausgesandt, die die aufgetretenen Energiedifferenzen als Energien tragen (dies bezeichnet man als Fluoreszenz). Die energetischen Abstände zwischen den Schalen sind dabei so groß, dass (zumindest teilweise) Licht im sichtbaren Bereich emittiert werden kann (der Strahl hat eine bläuliche Farbe).

Die Häufigkeit, mit der Elektronen gegen Gasatome stoßen, hängt natürlich vom Druck des Gases ab. Je höher der Druck (und die Temperatur, aber diese soll hier als konstant angenommen werden), umso geringer wird die mittlere freie Weglänge der Elektronen. Damit ist klar, dass der Wasserstoff unter einem sehr geringen Druck stehen muss: Bei höherem Druck würden zu viele Elektronen mit den Gasatomen wechselwirken und aus ihrer Flugrichtung abgelenkt werden sowie ihre Energie und damit ihre Geschwindigkeit zumindest teilweise verlieren. Der Strahl wäre in diesem Fall unscharf oder würde überhaupt keinen Kreis mehr beschreiben, weil ein Großteil der Elektronen schon vor dem Durchfliegen der ganzen Kreisbahn durch Stöße aus ihrer Flugrichtung abgelenkt würde bzw. Energie verloren hätte.

Andererseits kann der Druck aber auch nicht zu niedrig gewählt werden, wenn der Strahl sichtbar bleiben soll. Die Stoßwahrscheinlichkeit (der sog. „Stoßquerschnitt“) muss so groß bleiben, dass genügend Wechselwirkungen erfolgen, bei denen Licht ausgesandt wird.

3.4 Einfluss des Erdmagnetfeldes

Bei unseren gesamten Messungen sind wir davon ausgegangen, dass die Elektronen ausschließlich durch das Magnetfeld der Helmholtzspulen beeinflusst werden. Nun soll diskutiert werden, welchen Einfluss das Magnetfeld der Erde auf diesen Versuch hat. Dabei ist zu bedenken, dass dieses Feld nicht senkrecht auf der Erdoberfläche steht, sondern sowohl eine horizontale als auch eine vertikale Komponente besitzt, wobei der „Einfallswinkel“ auf die Erde (der sog. Inklinationswinkel) hauptsächlich von der geographischen Breite des Messortes abhängt. Im Süden Deutschlands beträgt er ungefähr 63° .

Offensichtlich müssen wir die vertikale Komponente hier nicht beachten, denn sie hat keinen Einfluss auf den sich ergebenden Bahnradius, sondern kann allenfalls eine Verformung der Kreisbahn zu einer Spirale verursachen, da die Elektronen im Messaufbau vertikal in die Röhre eingeschossen werden. Diesen Verformungseffekt wollen wir hier nicht berücksichtigen. Statt dessen konzentrieren wir uns auf die Horizontalkomponente. Unter der Annahme, dass die Gesamtfeldstärke bei uns etwa $60\mu\text{T}$ beträgt, ergibt sich dafür: $B_h = 60\mu\text{T} \cdot \cos 63^\circ \approx 27\mu\text{T}$.

Nun ist noch zu überlegen, in welchem Fall diese Komponente den Versuch maximal beeinflusst. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie gerade (anti-)parallel zu dem von den Helmholtzspulen erzeugten Feld ist, denn dann wird dieses maximal geschwächt bzw. verstärkt. (Die Normale der Spulenebene zeigt dann zu einem der magnetischen Pole der Erde.)

Zum Nachweis dieses Effektes wäre es denkbar, den Versuch zweimal durchzuführen: Einmal misst man den Radius der Elektronenbahn, dann dreht man den ganzen Aufbau um 180° und misst diesen Radius erneut. Es sollte sich dann eine Differenz der Radien ergeben (wg. verschiedenen Magnetfeldern), die maximal ist, wenn die Achse der Spulenpaares parallel zu B_h war (siehe oben). Alternativ könnte man auch zunächst die Richtung von B_h mit einer Magnetnadel bestimmen und dann den Aufbau entsprechend ausrichten, um einen maximalen Effekt zu erhalten.

Wie groß ist nun dieser Effekt maximal? Um dies abschätzen zu können, bestimmen wir z.B. für eine Beschleunigungsspannung von 150V und einen Spulenstrom von 1,5A zweimal den Radius der Kreisbahn (wobei wir jetzt die spez. Ladung des Elektrons als bekannt voraussetzen), einmal mit maximalem B-Feld und einmal mit minimalem:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{2U_0}{(B_{\min})^2} \frac{e}{m}} \approx 36,2\text{mm} \quad \text{wobei } B_{\min} = B_{HH} - B_h = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{NI}{R} - 27\mu\text{T} \approx 1,14\text{mT}$$

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2U_0}{(B_{\max})^2} \frac{e}{m}} \approx 34,5\text{mm} \quad \text{wobei } B_{\max} = B_{HH} + B_h = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{NI}{R} + 27\mu\text{T} \approx 1,20\text{mT}$$

Man erkennt, dass sich der Radius um ca. 1,7mm ändert. Dies liegt leider unterhalb der systematischen Unsicherheit für den Radius, die beim Messen durch die Dicke des Strahls entsteht (siehe oben, ± 3 mm). Somit wird der Einfluss des Erdmagnetfelds die erhaltenen Werte wohl lediglich im Rahmen des eingerechneten Fehlers verändern.

Wenn man gezielt diesen Effekt nachweisen will, so bestünde noch die Möglichkeit, die gesamte Anordnung so aus der Horizontalen zu kippen, dass das Erdmagnetfeld parallel zum Feld der Helmholtzspulen verläuft, d.h. dass das gesamte Erdmagnetfeld von $60\mu\text{T}$ die Messung beeinflusst.