Versuch: Optische Abbildung (28.10.2002)

Inhalt:

1. Einführung zum Versuch

Im vorliegenden Versuch geht es darum, ein Grundverständnis von geometrischer Optik zu entwickeln. Zunächst werden der Unterschied zwischen einer Sammel- und einer Streulinse besprochen und ein Stapel Linsen nach Sammel- und Streulinsen geordnet. Nach diesem Einführungsversuch werden auf einer optischen Bank die Brennweiten einiger Sammellinsen und eines Linsensystems aus zwei Linsen mit Hilfe verschiedener Verfahren bestimmt sowie eine Linsenanordnung, wie sie typisch für einen Diaprojektor ist, aufgebaut und getestet.

2. Messungen und Bearbeitung der Auswertungsaufgaben

2.1 Ordnung eines Linsenstapels in Sammel- und Streulinsen

Zunächst wurden mit dem Betreuer nochmals Kriterien für die Einordnung in Sammellinsen und Streulinsen besprochen:

- Sammellinsen zeigen ein umgekehrtes Bild, falls man durch sie Gegenstände betrachtet, die weiter als die Brennweite von der Linse entfernt sind. Betrachtet man dagegen Gegenstände innerhalb der Brennweite, so wirkt die Sammellinse als Lupe (siehe Abb. 2.1.1).

- Bei Streulinsen, die bekanntlich negative Brennweite haben, macht die Unterscheidung in Gegenstände, die weiter oder weniger weit als die Brennweite entfernt sind, keinen Sinn. Es zeigt sich vielmehr bei Betrachtung des Strahlengangs, dass Streulinsen niemals umgekehrte Bilder produzieren, und dass Gegenstände durch sie verkleinert erscheinen (siehe Abb. 2.1.2).

Diese Kriterien folgen direkt aus den üblichen Methoden zur Konstruktion des Strahlenganges für Linsen in der geometrischen Optik: Von jedem Objektpunkt aus wird ein Brennstrahl und ein Parallelstrahl zur Linse hin gezeichnet; der Brennstrahl wird an der objektseitigen Hauptebene zum Parallelstrahl, der Parallelstrahl an der bildseitigen Hauptebene zum Brennstrahl. Zudem muss beachtet werden, wie das Gehirn des Menschen verschiedene optische Gegebenheiten verarbeitet (siehe Bildkommentare; genauere Betrachtung über „virtuelle Bilder“ auch siehe Antwort Frage 7):

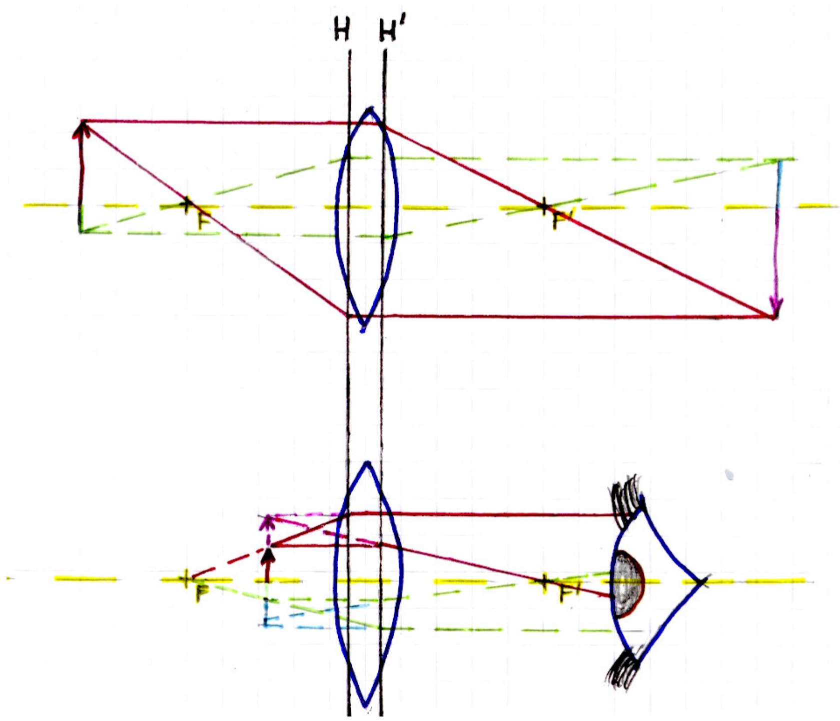


Abb. 2.1.1:

Oberes Bild: Erzeugung eines **reellen,** scharfen, aber umgekehrten Bildes mittels einer Sammellinse (Objekt außerhalb der Brennweite)

Unteres Bild: Betrachtung eines Objektes innerhalb der Brennweite durch eine Sammellinse. Das Objekt **erscheint** dem Betrachter vergrößert, da sein Gehirn die von der Linse gebrochenen, divergierenden Strahlen „hinter die Linse verlängert“ und so das rote Objekt um den rosa und blauen Pfeilteil vergrößert **sieht („virtuelles Bild“).**

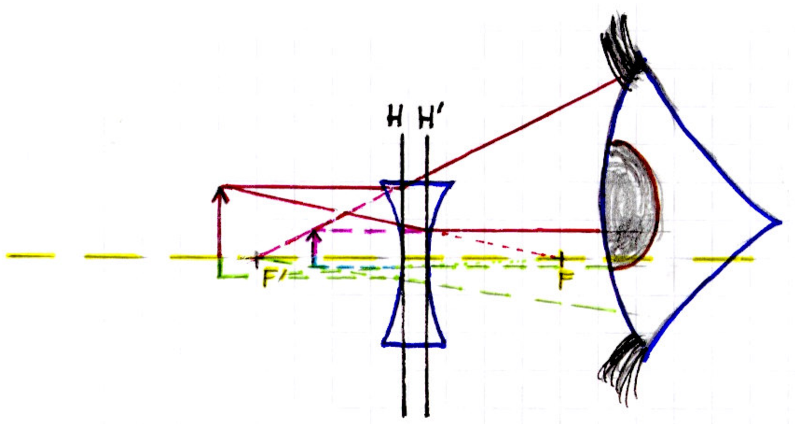


Abb. 2.1.2:

Analog dem unteren Bild in 2.1.1 erscheint bei einer Streulinse das Bild dem Betrachter stets verkleinert; auch hier verlängert das Gehirn divergierende Strahlen hinter die Linse und erdenkt sich das rosa/blaue verkleinerte Bild.

Bei der Untersuchung der vorhandenen Linsen ergaben sich schließlich folgende Ergebnisse:

Linse:	**S- (Sammel-) oder Z- (Zerstreuungs-)Linse?**
A	S
B	S
C	S
D	S
E	Z
F	S
G	S
H	S

2.2 Bestimmung von Brennweiten dünner Linsen durch Autokollimation

Wie in der Anleitung beschrieben ist, kann man bei dünnen Linsen (d.h. Hauptebenenabstand *h* näherungsweise gleich Null) die Brennweite allein mit der Autokollimationsmethode bestimmen. Dabei wird ein beleuchteter Spalt mit der zu vermessenden Linse über einen Spiegel auf die Objektebene zurück abgebildet. Die Linse wird auf der optischen Bank verschoben, bis das Bild scharf ist; dann wird der Abstand *k* zwischen Spalt und einer beliebigen, mit der Linse fest verbundenen Bezugsebene gemessen, und die Linse anschließend um 180° gedreht. Erneut verschiebt man die Linse so lange, bis die Abbildung scharf ist und misst wieder den genannten Abstand, im folgenden mit *l* bezeichnet. In der Anleitung wird abgeleitet, dass man daraus die gesuchte Brennweite wie folgt bestimmen kann:

$$f' = \frac{k+l}{2}$$

Dadurch, dass die Linse „in beiden Richtungen" gemessen wird, hat die Wahl der Bezugsebene keinen Einfluss auf das Ergebnis für *f'*. Zweckmäßigerweise wird hierfür freilich eine Markierung am Reiter mit der Linse genutzt.

Während der Durchführung stellte sich heraus, dass die Entscheidung, wann genau das Bild scharf ist, nicht exakt getroffen werden kann, sondern eher subjektiv ist. Wir entschieden uns daher dafür, jede Messung zweimal mit verschiedenen Experimentatoren durchzuführen und werden im folgenden jeweils die Mittelwerte verwenden.
Die Differenz der beiden Werte benutzen wir ferner für die obere Abschätzung des Fehlers: die Unsicherheit der Längen *k* und *l* beziffern wir mit der maximalen aufgetretenen Differenz zwischen zwei Messungen, nämlich 3mm. In dieser groben Abschätzung kann dann der reine Ablesefehler von der Skala (auch bei der Bestimmung der Spaltposition) offensichtlich gegenüber dem Fehler durch „subjektives Schärfeempfinden" vernachlässigt werden. Der Fehler der Mittelwerte für *k* und *l* ergibt sich dann mittels quadratischer Fehlerfortpflanzung aus den statistischen Einzelfehlern zu:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial k_1}\Delta k_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial k_2}\Delta k_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}3\right)^2}\, cm \approx 0{,}2 cm \text{ (analog für } l\text{),}$$

der Fehler für die Brennweite *f'* völlig analog zu gerundet ebenfalls 0,2cm.

Nun aber zu den Messwerten selbst: Der Spalt wurde während der gesamten Messung an der Position x=13cm festgelassen. Im Protokollheft sind die Werte der Linsenpositionen (LP) 1 und 2 verzeichnet, an denen die scharfen Bilder entstanden. Die Längen *k* und *l* ergeben sich dann durch Subtraktion der Länge x=13cm von diesen Werten.

Anmerkung: Leider haben wir irrtümlicherweise anstatt der in der Anleitung verlangten Linse D die Linse H vermessen, ohne dies rechtzeitig zu bemerken.

Linse	LP 1 [cm]	LP 2 [cm]	k [cm]	l [cm]	f' [cm]
B	22,9 ± 0,2	23,1 ± 0,2	9,9 ± 0,2	10,1 ± 0,2	**10,0 ± 0,2**
C	33,5 ± 0,2	33,5 ± 0,2	20,5 ± 0,2	20,5 ± 0,2	**20,5 ± 0,2**
G	20,4 ± 0,2	20,5 ± 0,2	7,4 ± 0,2	7,5 ± 0,2	**7,5 ± 0,2**
H	41,5 ± 0,2	41,6 ± 0,2	28,5 ± 0,2	28,6 ± 0,2	**28,6 ± 0,2**

2.3 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems

In diesem Teil wurde ein Linsensystem aus den Linsen E und B im Abstand von 4 cm aufgebaut, das wie eine Sammellinse wirkt. Den Abstand von 4cm erhält man genau dadurch, dass man zwei Reiter direkt nebeneinander auf die Schiene klemmt und die Linsen in die beiden äußeren Löcher (d.h. vom jeweils anderen Reiter abgewandt) stellt. Von diesem Linsensystem sollen alsdann die Brennweite und der Hauptebenenabstand mittels zweier verschiedener Verfahren bestimmt werden.

- **Kombination aus Bessel- und Autokollimationsverfahren**

  Das Linsensystem mit Sammellinsenwirkung hat einen nicht zu vernachlässigenden Hauptebenenabstand. Daher kann die Bestimmung der Brennweite jeweils nicht durch die Besselmethode oder Autokollimation allein bestimmt werden; die jeweiligen Gleichungen für die Brennweite enthalten neben Messgrößen beide noch den Hauptachsenabstand h des Linsensystems.

  Für die Autokollimation bei nicht vernachlässigbarem Hauptebenenabstand gilt nach Anleitung die Beziehung:

  $$h = k + l - 2f'$$

  zwischen h (Hauptebenenabstand) und den Messgrößen k und l (Bedeutung von k und l siehe oben).

  Das Besselverfahren basiert darauf, dass, wenn ein Projektionsschirm vom Objekt weiter als $4f'+h$ (f', h sind die entsprechenden, unbekannten Größen des Linsensystems) entfernt auf der optischen Bank befestigt wird, das dazwischen liegende Linsensystem in zwei verschiedenen Positionen auf der optischen Bank ein scharfes Bild auf dem Schirm erzeugen wird. Misst man die Verschiebung d des Linsensystems von Position 1 zu Position 2, so ergibt sich nach Versuchsanleitung zwischen dem Abstand Objekt-Schirm, mit e benannt, der Verschiebung d, der Brennweite f' des Systems sowie seinem Hauptebenenabstand h folgende Beziehung:

  $$f' = (e - h - d^2 / (e - h)) / 4$$

  Führt man also bei ein und demselben Linsensystem die Autokollimation sowie das Besselverfahren durch, so kann man h im erhaltenen Gleichungssystem eliminieren und erhält die Brennweite f' in Abhängigkeit der Messgrößen:

  $$f' = \frac{1}{2}\sqrt{(e-k-l)^2 - d^2}$$

  Hat man die Brennweite bestimmt, so folgt aus obiger Gleichung für die Autokollimation ohne große Probleme auch noch der Wert für h, der hier ebenfalls bestimmt werden soll.

  Um den geforderten Mindestwert für e einzuhalten, könnte man ausprobieren, ob es zwei Stellungen des Systems mit scharfem Bild gibt und ggf. den Abstand des Schirms zum Objekt sukzessive vergrößern, allerdings ist in der Praktikumsanleitung bereits ein entsprechender vernünftiger Wert für e (1,25m) angegeben, auf den man die Anordnung justieren soll.

  Nach dieser kurzen Verfahrensbeschreibung nun aber zu den Messwerten:

Autokollimation:

Die Messungen wurden doppelt durchgeführt; die Messwerte für *k* und *l* entstehen jeweils wie in 2.2 durch Messung der Position der Bezugsebne (hier wurde die äußeren Marke des Reiters mit der Linse E gewählt) auf der optischen Bank und Abzug der Position des Spaltes (13,0 cm). Für die Messfehler wurden die Abschätzungen aus 2.2 verwendet; wenngleich hier einmal eine Differenz größer als 0,3 cm. festgestellt wurde, erscheinen die Grenzen sinnvoll als typische Abweichung, wenn man die vielen Messwerte von 2.2 ansieht. Für die **Durchschnittsbildung** werden die Fehler für die beiden *k*- bzw *l*-Werte **wie oben quadratisch** fortgepflanzt.

Messung	**k [cm]**	**l [cm]**
1	27,6 (+/-0,3) – 13,0 = 14,6 (+/-0,3)	50,0 (+/-0,3) – 13,0 = 37,0 (+/-0,3)
2	27,4 (+/-0,3) – 13,0 = 14,4 (+/-0,3)	49,6 (+/-0,3) – 13,0 = 36,6 (+/-0,3)
Schnitt	**14,5 (+/-0,2)**	**36,8 (+/-0,2)**

Besselmethode:

Auch hier wurden die Messungen für die beiden Positionen des Linsensystems, in denen es ein scharfes Bild auf dem Schirm zu erzeugen vermag, jeweils doppelt durchgeführt, jedoch sind hier nicht die Relativpositionen zum Spalt entscheidend, sondern, wie oben bereits erwähnt, einfach die Differenz *d* der Messwerte für die Position einer zum Linsensystem festen Bezugsebene. Der Fehler für die Messwerte wird wie oben zu (+/-0,3 cm) genommen; die Fehler pflanzen sich quadratisch zum Fehler für den Durchschnitt fort. Analog geht man für die Differenz *d* der beiden Durchschnittswerte vor: Es wird eine quadratische Fortpflanzung mit der Funktion *d*(*Wert1,Wert2*)=*Wert2-Wert1* und den entsprechenden partiellen Ableitungen durchgeführt. Der für das Besselverfahren außerdem noch wichtige Wert *e* ergibt sich aus der Position des Spalt-Dias von 13cm und der des Schirms von 138cm zu 125cm. Die Fehler für diese Werte sind wiederum reine Ablesefehler auf dem Lineal der optischen Bank und somit von vernachlässigbarer Größe.

Nun aber zu den Werten:

Messung	**erste Position f. scharfes Bild [cm]**	**zweite Position f. scharfes Bild [cm]**
1	37,8 (+/-0,3)	88,7 (+/-0,3)
2	38,2 (+/-0,3)	88,5 (+/-0,3)
Schnitt	**38,0 (+/-0,2)**	**88,6 (+/-0,2)**
d	**50,6 (+/-0,3)**	
e	**nochmals von oben abgeschrieben: 125**	

Errechnung der Brennweite:

Wie oben bereits erwähnt, ergibt sich die Brennweite aus den Messwerten zu:

$$f' = \frac{1}{2}\sqrt{(e - k - l)^2 - d^2}$$

Für *f'* berechnen wir den Fehler wieder mittels quadratischer Fehlerfortpflanzung, da die Einzelfehler als rein statistisch angenommen werden. Das sieht folgendermaßen aus:

$$\Delta f' = \sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial e}\Delta e\right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial k}\Delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial d}\Delta d\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{array}{l}\left(\frac{2\cdot(e-k-l)}{2\sqrt{(e-k-l)^2-d^2}}\cdot\Delta e\right)^2 + \left(\frac{-2\cdot(e-k-l)}{2\sqrt{(e-k-l)^2-d^2}}\cdot\Delta k\right)^2 + \left(\frac{-2\cdot(e-k-l)}{2\sqrt{(e-k-l)^2-d^2}}\cdot\Delta l\right)^2 + \\ + \left(\frac{-2\cdot d}{2\sqrt{(e-k-l)^2-d^2}}\cdot\Delta d\right)^2\end{array}}$$

Es ergibt sich mit den Messwerten folgender Wert für *f'* und den Fehler:

e = 125 (+/-0,0) cm
k = 14,5 (+/-0,2) cm
l = 36,8 (+/-0,2) cm
d = 50,6 (+/-0,3) cm

⇨ f'= 26,8 (+/-0,2) cm

Hieraus bestimmen wir h und den zugehörigen Fehler mittels der Beziehung $h = k + l - 2f'$ und einer entsprechenden linearen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial k}\Delta k\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial l}\Delta l\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial f'}\Delta f'\right| = |\Delta k| + |\Delta l| + 2\cdot|\Delta f'|$$

(die Fehler für k, l und f sind nicht statistisch unabhängig).

⇨ h = -2,3 (+/-0.8) cm

Dieser Wert ist offensichtlich sinnlos und resultiert evtl. aus einem zu kleinen Messwert für d.

- **Verfahren nach Abbe**

Auch das Verfahren von Abbe verlangt die Wahl einer beliebigen Bezugsebene, welche mit dem Linsensystem fest verbunden ist. Der Abstand zwischen Objekt und Ebene wird wie in der Anleitung mit g, der zwischen Bild und Ebene mit g' bezeichnet. Die Summe dieser beiden Größen wird variiert und das Linsensystem jeweils so verschoben, dass es scharf abbildet; neben g und g' wird dann jeweils noch die Bildgröße y' aufgezeichnet.

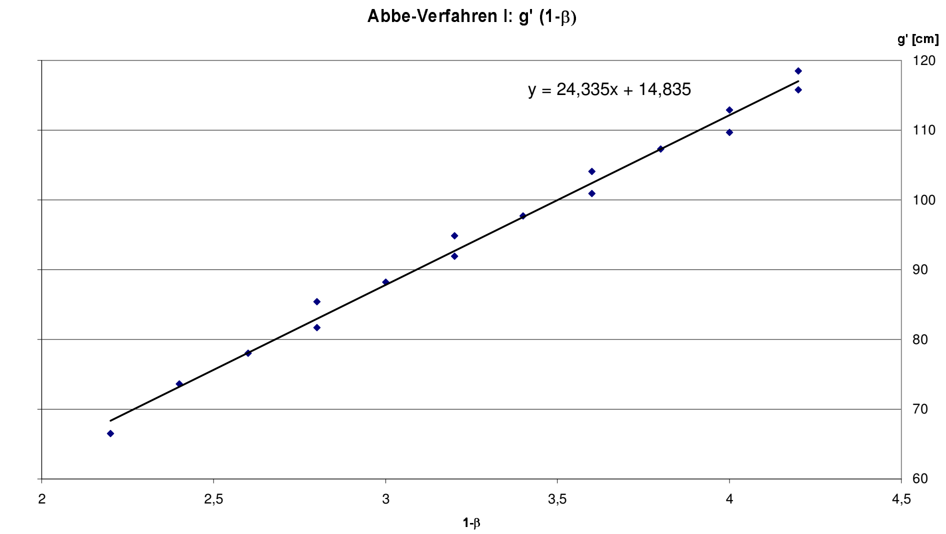
Nach Anleitung bestehen dann folgende Relationen zwischen g, g', dem Abbildungsmaßstab $\beta = y'/y$ (wo y die feste Objektgröße ist), sowie den gesuchten Größen $f' = -f$ (Brennweite), h_1 und h_2 (Abstand der Hauptebenen von der gewählten Bezugsebene):

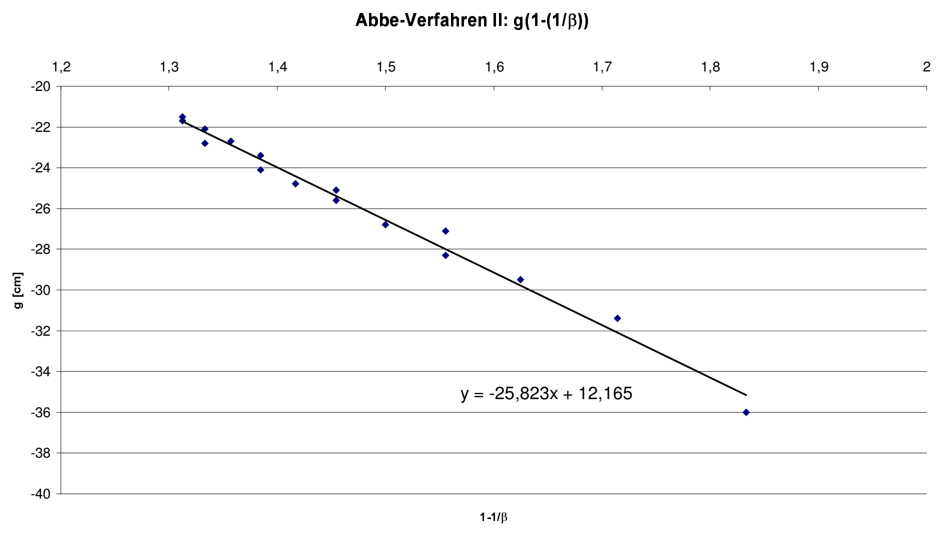
$$g = f\cdot\left(1-\frac{1}{\beta}\right) + h_1;\quad g' = f'\cdot(1-\beta) + h_2$$

Durch Auftragen von g über $(1 - 1/\beta)$ bzw. g' über $(1 - \beta)$ erhält man zwei Geraden, aus deren Steigung bzw. y-Achsenabschnitten sich f' bzw. h_2 ergeben.

Es ergeben sich folgende Messwerte und Diagramme:

Stellung Dia [cm]: 9	Objektrastergr. [cm]: 0,5							
Schirmposition [cm]	149,0	146,5	144,0	141,5	139,0	136,5	134,0	131,5
Ablesemarke [cm]	30,5	30,7	31,1	31,8	31,7	32,4	33,1	33,8
Rastergröße Bild [cm]	-1,6	-1,6	-1,5	-1,5	-1,4	-1,3	-1,3	-1,2
β	-3,2	-3,2	-3,0	-3,0	-2,8	-2,6	-2,6	-2,4
g	-21,5	-21,7	-22,1	-22,8	-22,7	-23,4	-24,1	-24,8
g'	118,5	115,8	112,9	109,7	107,3	104,1	100,9	97,7
1-1/β	1,31	1,31	1,33	1,33	1,36	1,38	1,38	1,42
1-β	4,2	4,2	4,0	4,0	3,8	3,6	3,6	3,4
Schirmposition [cm]	129,0	126,5	124,0	121,5	119,0	116,5	114,0	111,5
Ablesemarke [cm]	34,1	34,6	35,8	36,1	37,3	38,5	40,4	45,0
Rastergröße Bild [cm]	-1,1	-1,1	-1	-0,9	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6
β	-2,2	-2,2	-2,0	-1,8	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2
g	-25,1	-25,6	-26,8	-27,1	-28,3	-29,5	-31,4	-36,0
g'	94,9	91,9	88,2	85,4	81,7	78,0	73,6	66,5
1-1/β	1,45	1,45	1,50	1,56	1,56	1,63	1,71	1,83
1-β	3,2	3,2	3,0	2,8	2,8	2,6	2,4	2,2





Aus den Diagrammen lassen sich jeweils auch die Gleichungen der Regressionsgeraden ablesen. Die Steigung und der Achsenabschnitt lassen sich dabei gemäß der im ABW-Skript (Seite 27f, Stand: 14.05.2002) berechnen. Dort findet man auch die Beziehungen zur Bestimmung der zugehörigen Unsicherheiten. Die Werte sind nachfolgend zusammengefasst (*D* bezeichnet dabei die im Fehlerrechnungsskript erwähnte Koeffizientendeterminante):

x-Achse: 1-β y-Achse: g'	D [cm²]:	98,52
	h2 [cm]:	14,83
	f' [cm]:	24,33
	s [cm]:	1,52
	Δh2 [cm]:	2,06
	Δf' [cm]:	0,61
x-Achse: 1-1/β y-Achse: g	D [cm²]:	5,58
	h1 [cm]:	12,17
	f [cm]:	-25,82
	s [cm]:	0,48
	Δh1 [cm]:	1,19
	Δf [cm]:	0,81

Mit diesen Werten kann man schließlich den Hauptebenenabstand $h=h_2-h_1$ sowie den endgültigen Wert für die Brennweite (als Mittelwert der Ergebnisse aus den beiden Diagrammen) berechnen. Dabei wenden wir, da es sich um statistische Fehler handelt, eine quadratische Fehlerfortpflanzung analog wie z.B. in Abschnitt 2.3 an. Man erhält schließlich:

$$\overline{f}' = -\overline{f} \approx 25{,}1cm \pm 0{,}5cm$$
$$h = h_2 - h_1 \approx 2{,}7cm \pm 2{,}4cm$$

Die geforderte maßstabsgetreue Zeichnung des Messaufbaus findet sich im Protokollheft.

- **Bestimmung der Brennweite der Zerstreuungslinse**

  Mit der Beziehung (6) der Anleitung ergibt sich bei einem Linsenabstand *t* (in unserem Fall *t*=4cm) als Gesamtbrennweite des Systems (wo f_1' und f_2'die Brennweiten der Einzellinsen sind):

$$f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{t - f_1' - f_2'}$$

  Sei nun f_2' die gesuchte Brennweite der Zerstreuungslinse. Auflösen der obigen Beziehung ergibt:

$$f_2' = \frac{f' \cdot (t - f_1')}{f' - f_1'}$$

  Aus dem Autokollimationsverfahren erhielten wir oben f_1'=10,0cm ± 0,2 cm (Linse B, vgl. Abschnitt 2.2) sowie aus dem Autokollimations-/Besselverfahren *f*''=26,8cm ± 0,2cm. Daraus gewinnt man (mit quadratischer Fehlerfortpflanzung) als Brennweite der Zerstreuungslinse

$$f_2' = -9{,}6cm \pm 0{,}5cm$$

  Analog kann man diese Rechnung auch mit der aus dem Abbeverfahren gewonnenen Gesamtbrennweite *f*'=25,1cm ± 0,5cm durchführen (die Brennweite der Linse B entstammt freilich weiterhin dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Versuch). Man erhält dann als Ergebnis:

$$f_2' = -10{,}0cm \pm 0{,}5cm$$

- **Lage und Abstand der Hauptebenen – mit den Gleichungen (7)/(8) der Anleitung berechnet**

Aus den gerade verwendeten und berechneten Größen lassen sich mittels der genannten Formeln gewinnen:

Der Abstand von H zur Hauptebene der Linse E:

$$z = \frac{-f_1' \cdot t}{t - f_1' - f_2'} = \begin{cases} -10{,}0cm \text{ für } f_2' = -10{,}0cm \\ -13{,}8cm \text{ für } f_2' = -9{,}6cm \end{cases}$$

Der Abstand von H' zur Hauptebene der Linse D:

$$z' = \frac{f_2' \cdot t}{t - f_1' - f_2'} = \begin{cases} -10{,}0cm \text{ für } f_2' = -10{,}0cm \\ -13{,}2cm \text{ für } f_2' = -9{,}6cm \end{cases}$$

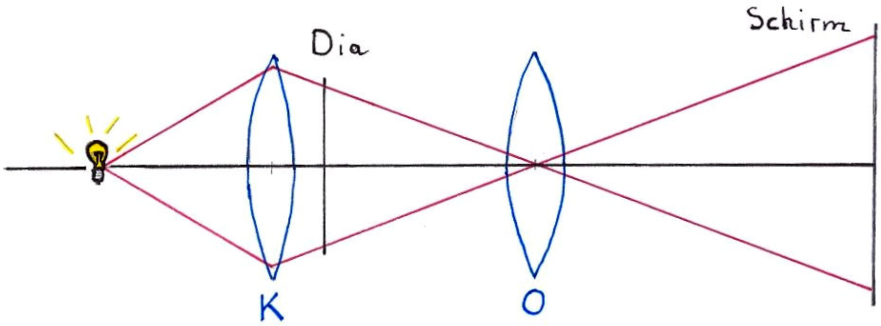
Der Abstand zwischen den beiden Hauptebenen H und H' des Systems:

$$h = \frac{t^2}{t - f_1' - f_2'} = \begin{cases} 4{,}0cm \text{ für } f_2' = -10{,}0cm \\ 4{,}4cm \text{ für } f_2' = -9{,}6cm \end{cases}$$

Der errechnete Wert für *h* deckt sich mit dem mittels Abbeverfahren berechneten Wert im Rahmen von dessen Fehlertoleranz.

2.4 Diaprojektor (beinhaltet Frage 2)

Aus den Linsen A und C sollte ein Diaprojektor aufgebaut werden. Dabei dient A also sogenannte Kondensorlinse, während C die Objektivlinse darstellt. Folgende Konstellation stellte sich als die günstigste heraus:



- Linse A ist so anzubringen, dass die Lampe gerade auf das Zentrum des Objektivs abgebildet wird.
- Das Dia sollte sich idealerweise direkt hinter der Linse A befinden.

Um dies zu verstehen, muss man sich die Funktion der einzelnen Bestandteile ansehen. Die Kondensorlinse A hat mit der eigentlichen Abbildung des Dias auf den Schirm nichts zu tun. Ihre einzige Aufgabe besteht darin, einen möglichst großen Teil des Lichtes der Halogenlampe für die Abbildung nutzbar zu machen und folglich ein möglichst lichtstarkes Bild zu erzielen. Dies erreicht man dadurch, dass man das von der Lampe ausgehende Licht auf das eigentliche Abbildungsobjektiv fokussiert. Dieses ist dann für die Abbildung des Dias auf den Projektionsschirm verantwortlich. Die Stellung der Objektivlinse ist also vom Abstand zwischen Objekt (Dia) und Schirm abhängig, denn jeder Punkt des Dias muss auf genau einen Bildpunkt abgebildet werden.

Die Position des Dias schließlich sollte so nah wie möglich hinter dem Kondensor liegen, so dass über die ganze Fläche eine gleichmäßige Ausleuchtung stattfindet.
Mit diesen Erkenntnissen deckt sich auch das Ergebnis des Versuchs, Linse A aus dem Projektor zu entfernen. An der Bildschärfe ändert sich dabei nichts, denn A ist ja wie erwähnt nicht für die Abbildung verantwortlich. Allerdings büßt das Bild stark an Helligkeit ein, und vor allem wird überhaupt nur noch ein Teil des Dias (die Mitte) so stark erleuchtet, dass er auf den Schirm abgebildet werden kann.

3. <u>Beantwortung der Fragen</u>

3.1 Verhältnis der Bildgrößen in Stellung 1 und Stellung 2 beim Besselverfahren

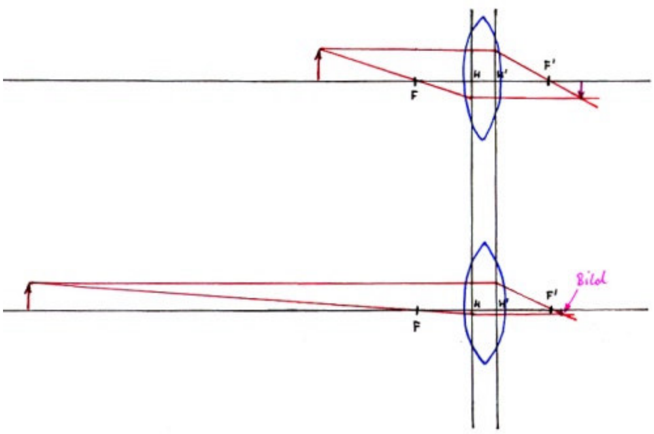
Aus einer Betrachtung der Grafiken auf Seite 7 der Anleitung erhält man:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{a_1'-f'}{f'};\quad \frac{y_2'}{y_1} = \frac{f}{a_2 - f} = \frac{-f'}{-(a_1'-f')} = \frac{f'}{a_1'-f'} \quad\Rightarrow\quad \frac{y_2'}{y_1'} = \left(\frac{f'}{a_1'-f'}\right)^2$$

3.2 Anordnung der optischen Elemente eines Projektionsapparates

siehe Teil 2.5

3.3 Photoobjektiv



Gefragt war nach der Bildweite bei einem auf unendlich eingestellten Photoobjektiv mit einer Brennweite von 200mm. Bei Betrachtung des Sachverhaltes (siehe nebenstehendes Bild) fällt auf, dass die scharfen Bilder bei solch einer „Sammellinse“ (bzw. einem entsprechenden System) um so näher hinter dem Brennpunkt entstehen, um so weiter die Objekte von der objektseitigen Hauptebene entfernt sind. Im Extremfall eines unendlich weit entfernten Objektes, wird der objektseitige Brennstrahl zum Parallelstrahl entlang der optischen Achse und das scharfe Bild entsteht direkt am bildseitigen Brennpunkt. Also muss die Filmebene von der bildseitigen Hauptebene genau 200mm entfernt sein. Dieses Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn man in der Gleichung (3.2) der Anleitung die Größe *a* gleich unendlich gesetzt hätte (=> $a'=f'$).

3.4 Entstehung eines virtuellen Bildes

Gegeben ist eine Sammellinse der Brennweite *f*. Im Abstand $a = 0,5 \cdot f$ von der objektseitigen Hauptebene der Linse soll sich nun ein Objekt der Größe *y* befinden. Wir gehen davon aus, dass auf beiden Seiten der Linse dasselbe Medium vorliegt und daher die Brennweiten *f* und *f'* betragsmäßig gleich sind (sie unterscheiden sich aber im Vorzeichen). Gleichung (3) der Anleitung beschreibt dann den Zusammenhang zwischen *f*, *a* und der Bildweite *a'*:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

Daraus erkennt man, dass das Bild im Abstand

$$a' = \frac{a \cdot f}{f - a} = \frac{0{,}5 \cdot f^2}{0{,}5 \cdot f} = f$$

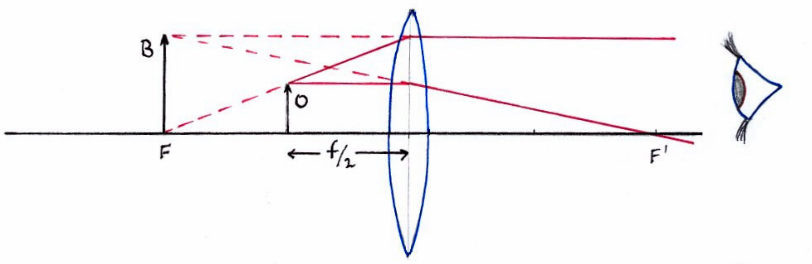
von der bildseitigen Hauptebene entsteht. Man beachte, dass hier wegen f<0 auch a' kleiner als Null ist, d.h. das Bild liegt auf dergleichen Seite der Linse wie das Objekt. Dies wird verständlich, wenn man versucht, das Bild nach der in der Anleitung beschriebenen Methode zu konstruieren, was unten noch einmal für den vorliegenden Spezialfall beschrieben wird.

Zunächst wollen wir aber noch die Bildgröße bestimmen. Dazu verwenden wir Gl. (4) der Anleitung:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \Leftrightarrow y' = y \cdot \frac{a'}{a} = \frac{f}{0{,}5 \cdot f} \cdot y = 2y$$

Das Bild ist also doppelt so groß wie das Objekt. Ferner haben y und y' das gleiche Vorzeichen, d.h. die Ausrichtung von Objekt und Bild ist die gleiche.

Wir wollen jetzt also noch anhand einer Skizze zeigen, wie es zur Entstehung des (sog. virtuellen) Bildes mit der doppelten Größe kommt.



Wie bei 2.1.1 b) / 2.1.2 erkennt man aus der Skizze, dass sich die beiden Strahlen auf der rechten Seite der Linse niemals schneiden, d.h. es kann kein reales Bild entstehen. Bei der durch das Gehirn vorgenommenen Extrapolation der Strahlen auf die Bildseite ergibt sich ein virtuelles Bild am objektseitigen Brennpunkt, das die doppelte Größe des Originals besitzt.

3.5 Gesamtbrennweite eines Linsensystems

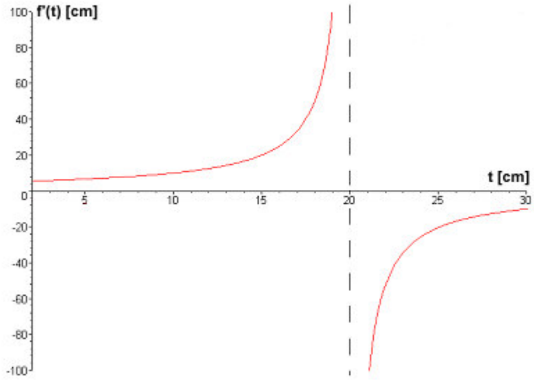
Gemäß Anleitung ist die Gesamtbrennweite eines Systems aus zwei dünnen Linsen mit Brennweiten f_1' und f_2' gegeben durch Gleichung (6):

$$f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{t - f_1' - f_2'}$$

wo t der Abstand der beiden Hauptebenen ist.
Im Spezialfall zweier Sammellinsen mit gleicher Brennweite $f_1'=f_2'$ >0 ergibt sich damit für die gesuchte Abhängigkeit der resultierenden Brennweite f' als Funktion des Hauptebenenabstands t:

$$f'(t) = -\frac{(f_1')^2}{t - 2f_1'}$$

Die folgende Grafik zeigt den Verlauf dieser Abhängigkeit, wobei die Einzelbrennweite f=10cm gewählt wurde:



Für sehr kleine Abstände t geht f' offenbar gegen $f_1'/2$, d.h. die beiden sehr nah beieinanderliegenden Sammellinsen wirken dann wie eine Sammellinse mit halber Brennweite. So lange $t < 2f'$ ist, ergibt sich stets eine positive resultierende Brennweite des Systems, es wirkt also wie eine Sammellinse. Bei $t=2f_1'$ besitzt die Funktion eine Unstetigkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel, d.h. bei Annäherung an diesen Abstand t geht f' betragsmäßig gegen Unendlich. Für Abstände $t > 2f'$ erhält man dann negative resultierende Brennweiten (also Streulinseneigenschaften), die für sehr große Abstände t gegen Null gehen.