

Versuch: Pohlsches Rad und Chaos (13.01.2003)

Inhalt:

- | | | |
|----|------------------------|---------|
| 1. | Einführung zum Versuch | Seite 1 |
| 2. | Aufgaben und Messungen | Seite 1 |

1. Einführung zum Versuch

Im vorliegenden Versuch geht es im Prinzip um etwas ganz Fundamentales: Die Modellierung von Vorgängen in der Natur mittels Differenzialgleichungen. Die Physik wäre ohne DGLen ein Nichts. Wir wollen, um die damit verbundenen Themen „Schwingungen“ und „Chaos“ aufzugreifen, Schwingungsvorgänge an einem Drehpendel (Pohlsches Rad) in mehreren verschiedenen Situationen beobachten:

- Das Rad kann mittels eines Motors über einen Exzenter und eine Gewindestange mit variabler Frequenz zu Schwingungen angeregt werden, ...
- ... es kann verschieden stark durch eine Wirbelstrombremse gebremst werden ...
- ... und man kann ein Gewicht an der Oberseite des Rades montieren, um das lineare System zu einem nichtlinearen System zu machen, das chaotische Schwingungen ausführen kann.

Wir beobachten, wie die Lösung der entsprechenden DGLen für die schwingungsfähigen Systeme in der Praxis aussieht, und erkennen Aspekte aus der Theorie wieder.

Um die Schwingungsvorgänge aufzuzeichnen steht im Versuch ein Messcomputer zur Verfügung, dessen Aufzeichnungsdaten – in einer Tabellenkalkulation ausgewertet – eine recht genaue Betrachtung der abgelaufenen Vorgänge erlauben.

2. Aufgaben und Messungen

2.1 Vorarbeiten zu Hause

Zunächst möchten wir kurz unsere Ergebnisse der in der Anleitung geforderten Vorarbeiten zusammenfassen. Es geht hier hauptsächlich noch einmal darum, ein Verständnis für die in der Anleitung beschriebenen Schwingungsvorgänge zu entwickeln.

a) Lineare und nichtlineare Schwingungen

- **Bewegungsgleichung für ein lineares Federpendel**

Ein „normales“ (Schrauben-)Federpendel kann wie auch das Pohlsche Rad in gewissen Grenzen (d.h. v.a. im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes) als linearer Oszillator aufgefasst werden. Wir betrachten im Folgenden eine harmonisch angeregte, gedämpfte Feder-schwingung (mit angehängtem Gewicht) unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die entsprechende Bewegungsgleichung ergibt sich dann aus folgendem Kräftegleichgewicht:

$$F_{res} = m\ddot{x} = F_{Feder} + F_{Dämpfung} + F_{Antrieb} + F_{Gewicht} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \sin(\omega t) + mg$$

Mit der Setzung $\lambda = \frac{\gamma}{2m}$ ergibt sich daraus die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) + g \quad (2.1)$$

- **Eigenfrequenz und Resonanzfrequenz**

Bevor wir näher auf die Lösungen von Gleichung (2.1) eingehen, führen wir zunächst eine Variablentransformation durch, um den Einfluss des Gravitationsfeldes zu eliminieren. Mit der Setzung

$$x' := x - \frac{mg}{k}$$

wird (2.1) zu:

$$\ddot{x}' + 2\lambda\dot{x}' + \frac{k}{m}x' = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \quad (2.2)$$

Anhand der folgenden Rechnung ist ersichtlich, dass die Schwerkraft keinen Einfluss auf Eigen- und Resonanzfrequenz hat.

Nun aber zur **Eigenfrequenz**: Dazu betrachten wir die zu (2.2) gehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz $x(t) = Ce^{\alpha t}$. Einsetzen führt auf die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + 2\alpha\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

mit den Lösungen $\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{k}{m}}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist demnach

$$x'(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

Fall: $\frac{k}{m} > \lambda^2$:

Dieser Fall ist der uns an dieser Stelle interessierende (und im folgenden ausschließlich betrachtete), da nur hier eine Schwingung im eigentlichen Sinn stattfindet. Es ergeben sich komplexe Werte für α und somit folgende Lösung:

$$x'(t) = e^{-\lambda t} \left[c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} t \right) \right]$$

Die gesuchte Eigenfrequenz des Systems ist also offensichtlich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} .$$

Fall: $\frac{k}{m} = \lambda^2$:

In diesem Fall erhält man eine Lösung der Form $x'(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}$ mit einem reellen α . Es kommt also keine Schwingung mehr zustande, sondern das System kehrt einmal ausgelenkt wieder in die Nulllage zurück, ohne zu überschwingen. Man spricht hier vom **aperiodischen Grenzfall**.

Fall: $\frac{k}{m} < \lambda^2$:

Es ergibt sich eine Lösung der Form $x'(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Das System schwingt auch hier nicht, sondern kehrt (noch langsamer als beim aperiodischen Grenzfall) in die Nulllage zurück. Man spricht hier auch vom **Kriechfall**.

Als nächstes sollten wir noch die **Resonanzfrequenz** des Pendels bestimmen. Dazu benötigen wir eine spezielle Lösung von (2.2). Diese wird im stationären Fall die erzwungene Schwingung beschreiben, da die homogene Lösung wie oben beschrieben exponentiell abnimmt. Einfacher als mit einem reellen kommt man hier mit einem komplexen Ansatz zum Ziel, weshalb wir (2.2) in der Form

$$\ddot{x}' + 2\lambda \dot{x}' + \frac{k}{m} x' = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

darstellen. Ein Ansatz der Form $x'(t) = x'_0 e^{i\omega t}$ führt (eingesetzt in die DGL) auf die komplexe Amplitude

$$x'_0 = \frac{\frac{F_0}{m} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m} - 2i\lambda\omega \right)}{\left(-\omega^2 + \frac{k}{m} \right)^2 + (2\lambda\omega)^2} .$$

Die uns interessierende reelle Amplitude A ist dann der Betrag der komplexen Amplitude:

$$A = |x'_0| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$$

Die Resonanzfrequenz ω_R ist nun gerade die Frequenz, bei der A maximal, also der Nenner in obigem Ausdruck minimal wird. Dies ist der Fall bei

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\lambda^2}.$$

- **Nichtlinearitäten**

Die Annahme, oben beschriebenes Federpendel sei ein linearer Oszillator, ist lediglich eine Näherung. In erster Linie liegt dies daran, dass das Hookesche Gesetz für eine Feder nicht exakt gilt. Lediglich bei kleinen Auslenkungen kann man annehmen, dass die Federkraft proportional zur Dehnung der Feder ist. Streng genommen müssten allerdings auch höhere Potenzen von x in die Bewegungsgleichung eingehen¹.

Es sind jedoch auch andere Nichtlinearitäten denkbar. So wird es etwa nur schwer gelingen, eine Dämpfungsart zu finden, bei der die dämpfende Kraft exakt proportional zur Geschwindigkeit ist. Ein nichtlinearer Zusammenhang hier könnte dann zu höheren Potenzen von \dot{x} in der Bewegungsgleichung führen.

Weiterhin wird bei obiger Rechnung angenommen, dass die schwingende Masse punktförmig ist und sich am Ende der Feder befindet. Je nach Form und Größe der Masse (und nach Masse der Feder) kann dies jedoch nicht hinreichend exakt erfüllt sein, so dass z.B. die Masse der Feder eine Abweichung vom linearen Oszillator verursacht.

Auch etwaige Torsions- oder Longitudinalschwingungen innerhalb der Feder können das System beeinflussen, so dass es nichtlinear wird.

- **Weitere lineare Systeme**

In Natur und Technik treten viele Systeme und Prozesse auf, die (näherungsweise) durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden können. Einige Beispiele:

- mathematisches Pendel
- elektrische Schwingkreise
- elektromagnetische Wellen
- radioaktiver Zerfall
- Wachstumsprozesse (etwa in der Biologie)

In der überwiegenden Zahl der Fälle ist aber der lineare Zusammenhang nur eine Näherung, d.h. Terme höherer Ordnung können in gewissen Bereichen vernachlässigt werden. „Echt lineare“ Systeme (d.h. solche, die ohne jegliche Näherung exakt linear sind) findet man in der Natur in der Regel nicht.

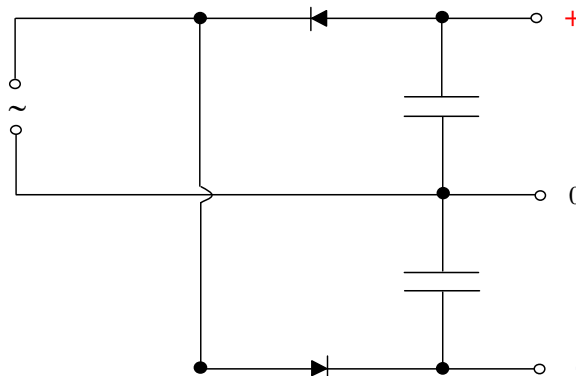
¹ Es können freilich auch andere nichtlineare Zusammenhänge in nichtlineare DGLen eingehen (siehe z.B. $\sin(\varphi)$ in Gleichung (12) der Anleitung), diese sind aber durch höhere Potenzen beliebig gut annäherbar, insofern es sich um analytische Funktionen handelt. Daher wurde hier immer diese Formulierung gewählt.

• **Merkmale linearer und nichtlinearer Systeme**

| Lineare Systeme | Nichtlineare Systeme |
|---|---|
| lineare Differentialgleichung, mathematisch geschlossene Lösung möglich | nichtlineare Differentialgleichung, oft nicht mehr analytisch lösbar |
| auch bei verschiedenen Anfangsbedingungen ergibt sich dasselbe Grundverhalten | unterschiedliche Anfangsbedingungen können vollkommen verschiedenes Verhalten des Systems zur Folge haben |
| vorhersagbar | chaotisches, nicht mehr vorhersagbares Verhalten möglich |
| Schwingungsparameter (insbesondere Frequenz) nicht amplitudenabhängig | Schwingungsparameter hängen von der Amplitude ab (etwa: Amplituden-Frequenz-Kopplung) |
| Superpositionsprinzip gilt | Superpositionsprinzip gilt nicht |

b) Gleichrichter

In der Anleitung war weiterhin gefordert, einen Gleichrichter zu zeichnen, der eine gegenüber der Wechselspannung doppelt so große Gleichspannung liefert, die allerdings wenig geglättet ist. Eine solche Schaltung kann z.B. wie folgt realisiert werden:



Der Antriebsmotor im Versuch wird aus einem solchen Gleichrichter gespeist, was die Frage in 5.1, Punkt 4 der Anleitung beantwortet.

2.2 Frequenz und Dämpfungskonstante des ungetriebenen, linearen Drehpendels

Als erstes führten wir zwei Experimente mit dem ungetriebenen, linearen System durch, wobei das Zusatzgewicht abmontiert, der Antrieb abgeschaltet, und das Pendel auf den Nullpunkt als Ruhelage justiert war. Der Dämpfungsstrom betrug 0,40A ($\pm 0,01A$). Das Pendel wurde ausgelenkt und losgelassen; es sollte anhand der darauffolgenden Schwingung die Dämpfungskonstante sowie die Eigenfrequenz des Systems ermittelt werden. Dazu wurde einmal manuell und einmal mittels PC gemessen (s.u.).

Zunächst noch einmal kurz zur mathematischen Beschreibung der Schwingung. Der hier betrachtete Vorgang wird durch die recht einfache (lineare, homogene) DGL aus der Anleitung:

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + \frac{k}{\Theta}\varphi = 0 \tag{2.3}$$

mit den konstanten Koeffizienten k/Θ sowie λ beschrieben. Die (Dreh-)Winkelfunktion φ wird durch sie so festgelegt, dass sich eine gedämpfte Drehschwingung des Rades einstellt, die als

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_0 t - \beta) \quad (2.4)$$

geschrieben werden kann, wo β die Phase zum Zeitpunkt $t = 0$, φ_0 die Amplitude zum Zeitpunkt $t = 0$ (die jedoch für β ungleich 0 niemals als Auslenkung erreicht wird) und ω_0 die Kreisfrequenz ist, welche für diesen Schwingungsablauf den Wert

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \lambda^2}$$

mit den Konstanten aus (2.3) hat.

a) Manuelle Messreihen

Die Frequenz und die Dämpfungskonstante wurden hier manuell vermessen. Zunächst wurde fünfmal die für 10 Schwingungen benötigte Zeit gestoppt, und daraus die Frequenz und deren Fehler² ermittelt. Es ergeben sich folgende Werte:

| Berechnung der Periodendauer und Frequenz: | | | |
|--|--------------|-------------|------------------|
| Messung No. | Zeit [s] | | Frequenz f [1/s] |
| | für 10 Schw. | für 1 Schw. | |
| 1 | 19,9 | 1,99 | 0,504 |
| 2 | 19,7 | 1,97 | 0,507 |
| 3 | 19,9 | 1,99 | 0,503 |
| 4 | 19,7 | 1,97 | 0,507 |
| 5 | 19,7 | 1,97 | 0,509 |
| Mittelwert für f [1/s]: | | | 0,506 |
| Standardabweichung für f [1/s]: | | | 0,003 |
| Std.abw. für <f> [1/s]: | | | 0,001 |
| Mittelwert für T [s]: | | | 1,977 |
| Standardabweichung für T[s]: | | | 0,01 |
| Std.abw. für <T> [s]: | | | 0,005 |

Wir erhalten also

$$f = 0,506 \text{ Hz} \pm 0,001 \text{ Hz}$$

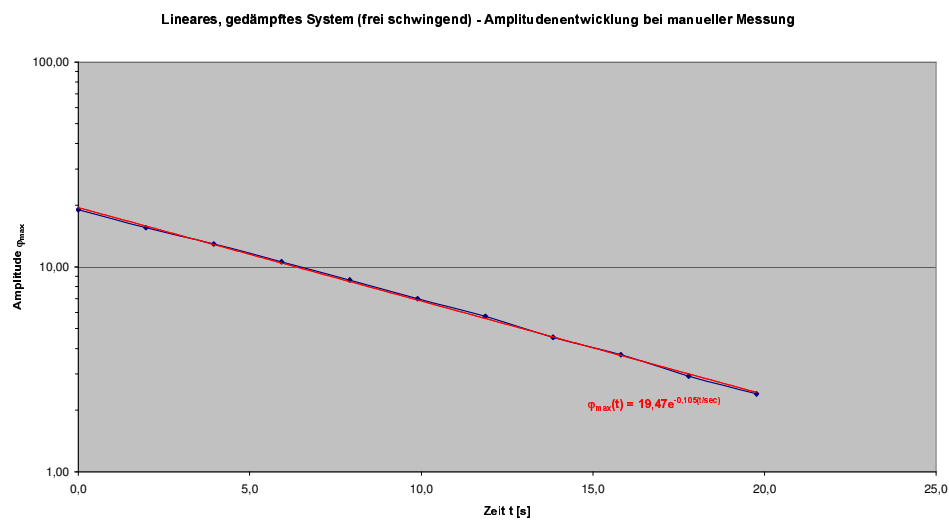
Wir wollen nun noch die Dämpfungskonstante sowie deren Fehler bestimmen, indem wir die Amplitude für 10 aufeinanderfolgende Schwingungen messen (die Maximalauslenkung kann auf einer Skala abgelesen werden). Die gemessenen Werte werden auf halblogarithmisches Papier gegen die verstrichene Zeit aufgetragen, welche mit obigem Mittelwert für T berechnet wird. Da der funktionale Zusammenhang „Amplitude φ_{\max} in Abhängigkeit von der Zeit t “ durch die ersten beiden Faktoren in (2.4) beschrieben wird:

$$\varphi_{\max}(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

² Als statistischer Fehler wurde hier nach allg. Konvention die Standardabweichung des Mittelwerts genommen; das Konfidenzniveau beträgt also 68,3%. Die Standardabweichung des Mittelwertes berechnet sich aus der Standardabweichung für die Einzelwerte mal der Studentfunktion (-> Tabelle) dividiert durch die Wurzel aus Anzahl der Messungen. Dieser so berechnete Fehler stellt wegen nicht vorhandenem syst. Fehler (die Uhr wird als nicht fehlergeicht angesehen, da die statistischen Fehler die Fehleichtung weit übertreffen) den Gesamtfehler dar.

muss sich der Wert $-\lambda$ im halblogarithmischen Diagramm direkt als Steigung der dort idealerweise entstehenden Geraden zeigen. Wenn die Kurve im Diagramm nicht gerade ist, so kann man anhand der schwankenden Steigung eine graphische Fehlerabschätzung für λ durchführen, indem man Geraden mit maximaler und minimaler Steigung einzeichnet. Es zeigte sich jedoch, dass die Messpunkte bei uns so genau auf einer Geraden liegen, dass dies sinnlos ist, da der aus der relativ ungenauen graphischen Fehlerbestimmung erhaltene Fehlerwert wohl selbst mit einem Fehler von größenordnungsmäßig 100% behaftet wäre. Wir überlassen die Fehlerbestimmung daher der exponentiellen Regressionsfunktion unseres Tabellenkalkulationsprogrammes, wie auch die Bestimmung der Geradensteigung selbst – eine rein graphische Bestimmung der Steigung wäre sehr einfach, aber deutlich ungenauer.

Hier ist das gemessene Diagramm:



Die rote Linie mit Gleichung ist die von der Tabellenkalkulation bestimmte Ausgleichsgerade. Die exponentielle Regressionsfunktion des Programmes gibt uns nun hierzu die Basis b und den Vorfaktor a des funktionalen Zusammenhangs, wenn man diesen als $a \cdot b^t$ schreibt, und den statistischen Fehler (d.h. die Standardabweichung, wie oben) für die beiden Werte, der hier wieder gleich dem Gesamtfehler ist³.

Der Exponent, also die Dämpfungskonstante λ errechnet sich dann durch Logarithmieren von b , der (absolute!) Fehler für den Exponenten ist dann (Fehlerfortpflanzung, Ableitung von $\ln x$ ist $1/x$) gleich dem relativen Fehler für die Basis. Aus der Dämpfungskonstante lassen sich des weiteren noch die Abklingzeit $1/\lambda$, also die Zeit, in der die Maximalauslenkung auf $1/e$ mal Ausgangswert abfällt, und die Halbwertszeit $\ln 2/\lambda$ berechnen; die Fehlerrechnung hierzu ist einfach, da der relative Fehler für die letzten beiden Werte genau dem relativen (!) Fehler für λ entspricht („Regel für Produkt/Quotient von Messgrößen und Konstanten“). Alles zusammengefasst findet man in folgender Tabelle:

³ Der durch den äußerst kleinen Fehler für T verursachte Fehler wird hier vernachlässigt, da er sich größenordnungsmäßig unter dem erhaltenen statistischen Fehler (siehe z.B. untenstehende prozentuale Fehlerangaben für τ) bewegt.

| Zeit-Amplituden-Zusammenhang: | | | | | |
|-------------------------------|------------|---------------------------|-----------|-----------|------------|
| Schwingung No. | Zeit t [s] | Amplitude φ_{max} | | | |
| | | Messung 1 | Messung 2 | Messung 3 | Mittelwert |
| 0 | 0,0 | 19,0 | 19,0 | 19,0 | 19,00 |
| 1 | 2,0 | 15,6 | 15,4 | 15,6 | 15,53 |
| 2 | 4,0 | 12,8 | 13,2 | 12,8 | 12,93 |
| 3 | 5,9 | 10,4 | 10,8 | 10,6 | 10,60 |
| 4 | 7,9 | 8,6 | 8,8 | 8,5 | 8,63 |
| 5 | 9,9 | 6,8 | 7,2 | 7,0 | 7,00 |
| 6 | 11,9 | 5,8 | 5,8 | 5,6 | 5,73 |
| 7 | 13,8 | 4,5 | 4,6 | 4,5 | 4,53 |
| 8 | 15,8 | 3,8 | 3,8 | 3,6 | 3,73 |
| 9 | 17,8 | 3,0 | 2,9 | 2,9 | 2,93 |
| 10 | 19,8 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,40 |

| Regressionsparameter: | | | |
|-----------------------|--------|-----------|--|
| | Basis | Vorfaktor | |
| Wert | 0,9003 | 19,47 | |
| Fehler | 0,0009 | 0,01 | |

| Charakteristische Schwingungswerte: | | | |
|-------------------------------------|-------|--------|--------------|
| | Wert | Fehler | proz. Fehler |
| Dämpfungskonstante [1/s]: | 0,105 | 0,001 | 1,0 |
| Abklingzeit [s]: | 9,52 | 0,09 | 1,0 |
| Halbwertszeit [s]: | 6,60 | 0,06 | 1,0 |

Wir fassen noch einmal die wichtigsten erhaltenen Werte zusammen:

- Dämpfungskonstante λ :

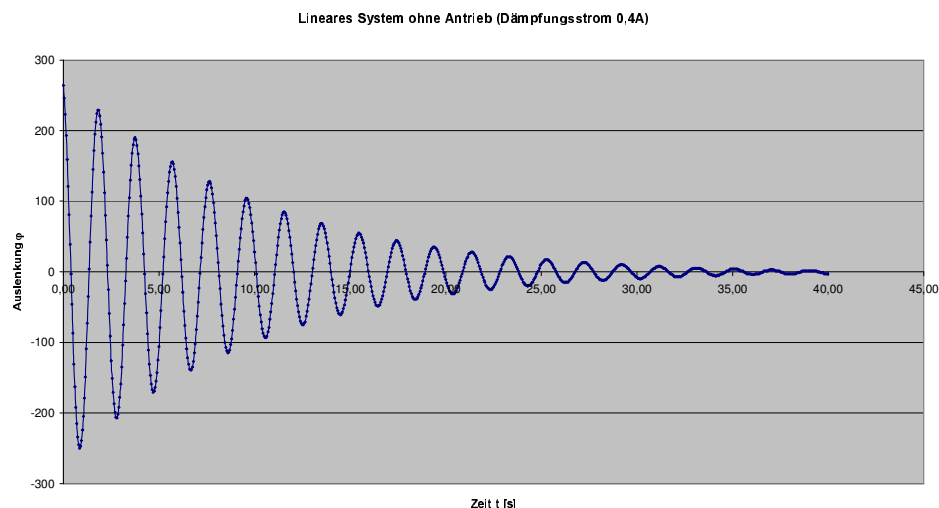
$$\lambda = 0,105/s \pm 0,001/s$$

- Abklingzeit $\tau = 1/\lambda$:

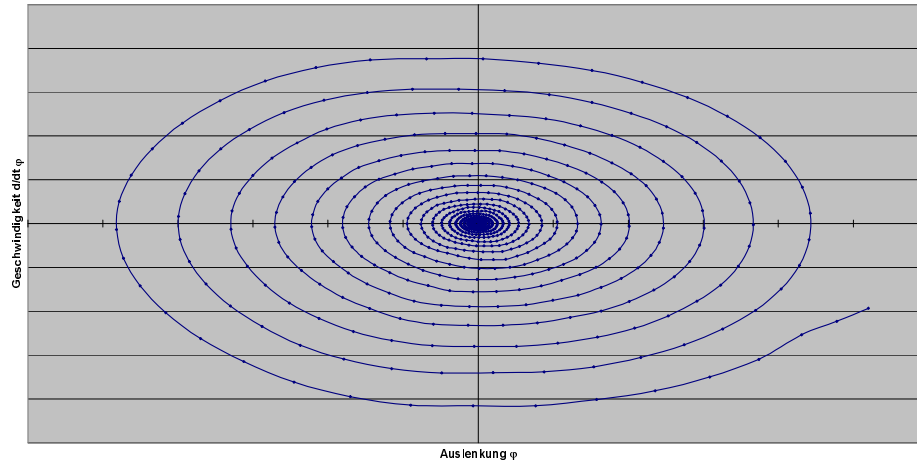
$$\tau = 9,52 \text{ s} \pm 0,09 \text{ s}$$

b) Messung mit dem Rechner

Hier haben wir nun die Schwingung mit dem Rechner aufgenommen, und obige Berechnungen der Dämpfungskonstante sowie Abklingzeit noch einmal durchgeführt. Da hier eine graphische Auswertung nicht verlangt war, haben wir die Auswertung noch einmal dem Tabellenprogramm überlassen. Doch bevor wir damit beginnen wollen, möchten wir noch ein Winkel-Zeit-Diagramm einer solchen Schwingung sowie ein Phasenraumdiagramm zeigen:



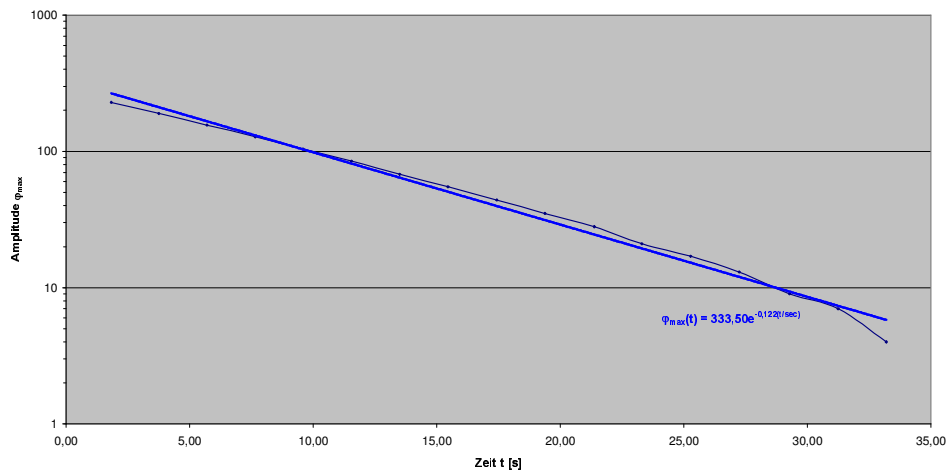
Lineares System ohne Antrieb (Dämpfungsstrom 0,4A) - Phasenraumdiagramm

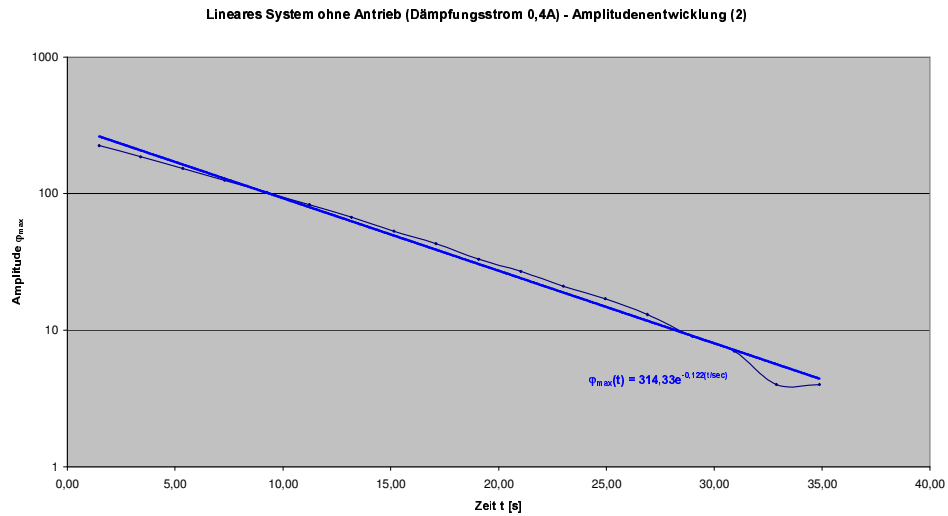


Zum ersten Diagramm ist zu sagen, dass man die gedämpfte Schwingung recht schön erkennt; man beachte allerdings, dass der PC die Winkelauslenkung in einer nicht näher bekannten Einheit darstellt. (Dies hat jedoch keinen Einfluss auf die unten folgende Berechnung der Dämpfungskonstanten bzw. Abklingzeiten.) Am zweiten Diagramm sieht man recht schön, dass das Phasenraumdiagramm einer solchen linearen, gedämpften Schwingung eine elliptische (bzw. evtl. auch kreisförmige) Spirale ist.

Jetzt zur eigentlichen Berechnungsaufgabe: Auf gleiche Weise wie vorher haben wir wieder Diagramme und die Tabellen mit den Berechnungen erstellt. Betrachten wir zunächst die Diagramme aus den zwei aufgenommenen Messreihen (hier sind die Ausgleichsgeraden dick-blau):

Lineares System ohne Antrieb (Dämpfungsstrom 0,4A) - Amplitudenentwicklung





Es fällt auf, dass die gegenüber 2.2a) doch deutlich länger laufenden Messungen Fluktuationen der Geradensteigung im halblogarithmischen Diagramm zutage fördern. Das wird sich auch im Fehler der zu berechnenden Größen in den folgenden 2 Tabellen zeigen, wengleich wir die rot markierten Werte wegen zu hoher Abweichungen bereits aus der Regression und Ausgleichsgeraden-Bestimmung ausgenommen haben:

| Zeit-Amplituden-Zusammenhang: | | | | | |
|---------------------------------|---------------------------|--------|---------|---------------------------|-------------------------------------|
| Zeit t [s] | Amplitude φ_{max} | T [s]: | f [Hz]: | Regressionsparameter: | |
| 1,83 | 229 | | | Basis | |
| 3,75 | 190 | 1,92 | 0,521 | | Wert |
| 5,70 | 156 | 1,95 | 0,513 | Fehler | |
| 7,65 | 128 | 1,95 | 0,513 | | 0,003 |
| 9,58 | 104 | 1,93 | 0,518 | 0,07 | |
| 11,55 | 85 | 1,97 | 0,508 | | Charakteristische Schwingungswerte: |
| 13,50 | 68 | 1,95 | 0,513 | Dämpfungskonstante [1/s]: | Wert |
| 15,45 | 55 | 1,95 | 0,513 | Abklingzeit [s]: | Fehler |
| 17,43 | 44 | 1,98 | 0,505 | Halbwertszeit [s]: | proz. Fehler |
| 19,38 | 35 | 1,95 | 0,513 | | |
| 21,38 | 28 | 2,00 | 0,500 | | |
| 23,30 | 21 | 1,92 | 0,521 | | |
| 25,28 | 17 | 1,98 | 0,505 | | |
| 27,25 | 13 | 1,97 | 0,508 | | |
| 29,28 | 9 | 2,03 | 0,493 | | |
| 31,25 | 7 | 1,97 | 0,508 | | |
| 33,20 | 4 | 1,95 | 0,513 | | |
| 35,28 | 1 | | | | |
| 37,05 | 3 | | | | |
| Mittelwert für f [1/s]: | | | 0,510 | | |
| Standardabweichung für f [1/s]: | | | 0,007 | | |
| Std.abw. für <f> [1/s]: | | | 0,002 | | |

| Zeit-Amplituden-Zusammenhang (Messung 2): | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------------------------|-----------|--------------|-----------------------|-------------------------------------|--|--|--|-------|-----------|--------|--------------|---------------------------|--------|-------|------|------------------|-----|-----|-----|--------------------|-----|-----|-----|
| Zeit t [s] | Amplitude φ_{\max} | T [s]: | f [Hz]: | Regressionsparameter: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1,48 | 225 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3,40 | 186 | 1,92 | 0,521 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5,35 | 153 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7,30 | 125 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9,25 | 102 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11,23 | 83 | 1,98 | 0,505 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13,18 | 67 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15,15 | 53 | 1,97 | 0,508 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17,10 | 43 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19,08 | 33 | 1,98 | 0,505 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21,03 | 27 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23,00 | 21 | 1,97 | 0,508 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24,95 | 17 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26,90 | 13 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 28,98 | 9 | 2,08 | 0,481 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30,93 | 7 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 32,88 | 4 | 1,95 | 0,513 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 34,88 | 4 | 2,00 | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 37,03 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 38,83 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Mittelwert für f [1/s]: | | | 0,509 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Standardabweichung für f [1/s]: | | | 0,009 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Std.abw. für $\langle f \rangle$ [1/s]: | | | 0,002 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Regressionsparameter:</th> </tr> <tr> <th></th> <th>Basis</th> <th>Vorfaktor</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Wert</td> <td>0,885</td> <td>314,33</td> </tr> <tr> <td>Fehler</td> <td>0,003</td> <td>0,06</td> </tr> </tbody> </table> | | | | | Regressionsparameter: | | | | Basis | Vorfaktor | Wert | 0,885 | 314,33 | Fehler | 0,003 | 0,06 | | | | | | | | |
| Regressionsparameter: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Basis | Vorfaktor | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Wert | 0,885 | 314,33 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Fehler | 0,003 | 0,06 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Charakteristische Schwingungswerte:</th> </tr> <tr> <th></th> <th>Wert</th> <th>Fehler</th> <th>proz. Fehler</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Dämpfungskonstante [1/s]:</td> <td>0,122</td> <td>0,003</td> <td>2,7</td> </tr> <tr> <td>Abklingzeit [s]:</td> <td>8,2</td> <td>0,2</td> <td>2,7</td> </tr> <tr> <td>Halbwertszeit [s]:</td> <td>5,7</td> <td>0,2</td> <td>2,7</td> </tr> </tbody> </table> | | | | | Charakteristische Schwingungswerte: | | | | | Wert | Fehler | proz. Fehler | Dämpfungskonstante [1/s]: | 0,122 | 0,003 | 2,7 | Abklingzeit [s]: | 8,2 | 0,2 | 2,7 | Halbwertszeit [s]: | 5,7 | 0,2 | 2,7 |
| Charakteristische Schwingungswerte: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Wert | Fehler | proz. Fehler | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Dämpfungskonstante [1/s]: | 0,122 | 0,003 | 2,7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Abklingzeit [s]: | 8,2 | 0,2 | 2,7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Halbwertszeit [s]: | 5,7 | 0,2 | 2,7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Die Periodendauer-Messwerte wurden hierbei durch Differenzen aus den Zeitwerten für die Amplitude berechnet. Man beachte, dass auch hier in den Fehler für λ kein Fehler für T eingeht: Die Messwerte für φ_{\max} werden vom Messcomputer direkt zur aktuellen Zeit in Relation gesetzt und nicht etwa zu einem aus $\langle T \rangle$ berechneten Messzeitpunkt wie bei der manuellen Messung. Daher gehen die statistischen Schwankungen von T bereits in den Fehler der exponentiellen Regression ein.

Wir fassen die Werte für die Frequenz und die Dämpfungskonstante sowie Abklingzeit noch einmal zusammen und berechnen Mittelwerte (und deren Fehler mittels quadratischer Fehlerfortpflanzung):

- Frequenzen $f_1, f_2, \langle f \rangle$:

$$f_1 = 0,510 \text{ Hz} \pm 0,002 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0,509 \text{ Hz} \pm 0,002 \text{ Hz}$$

$$\langle f \rangle = 0,510 \text{ Hz} \pm 0,001 \text{ Hz}$$

- Dämpfungskonstanten $\lambda_1, \lambda_2, \langle \lambda \rangle$:

$$\lambda_1 = 0,122/\text{s} \pm 0,004/\text{s}$$

$$\lambda_2 = 0,122/\text{s} \pm 0,003/\text{s}$$

$$\langle \lambda \rangle = 0,122/\text{s} \pm 0,003/\text{s}$$

- Abklingzeiten $\tau_1, \tau_2, \langle \tau \rangle$:

$$\tau_1 = 8,2 \text{ s} \pm 0,3 \text{ s}$$

$$\tau_2 = 8,2 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$$

$$\langle \tau \rangle = 8,2 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$$

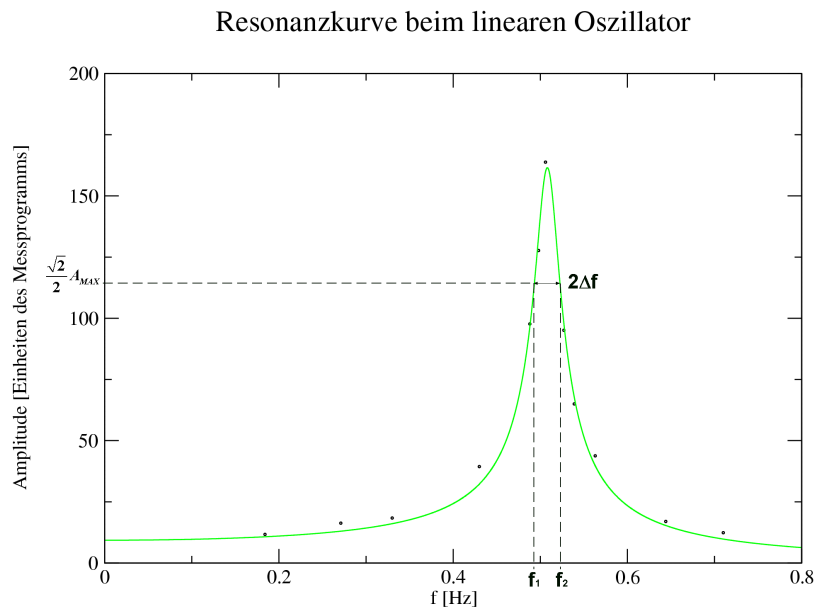
Man bemerkt, dass sich die Werte leider nicht mit denen aus der manuellen Bestimmung decken. Das liegt wahrscheinlich an Fluktuationen der Schwingungswerte während des längeren Messzeitraums mit dem PC (wie oben bereits erwähnt).

2.3 Resonanzkurve

Zur Aufzeichnung der Resonanzkurve wurde das Pohlsche Rad mit einem Elektromotor bei verschiedenen Frequenzen angetrieben und damit zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Nach dem Erreichen des stationären Zustands wurden jeweils zehn Perioden mit dem Computer aufgezeichnet. Gleichzeitig wurde mit der Stoppuhr die Zeit für zehn volle Perioden und somit die Frequenz der Anregung bestimmt. Aus den .max-Dateien erhält man dabei die Amplituden der erzwungenen Schwingung für die gewählten Anregungsfrequenzen. Die nachfolgende Tabelle fasst unsere Ergebnisse zusammen:

| Anregungsfrequenz [s^{-1}] | Amplitude |
|--------------------------------|-----------|
| 0,184 | 12 |
| 0,271 | 16 |
| 0,330 | 18 |
| 0,430 | 39 |
| 0,488 | 98 |
| 0,498 | 128 |
| 0,506 | 164 |
| 0,527 | 95 |
| 0,539 | 65 |
| 0,563 | 44 |
| 0,644 | 17 |
| 0,710 | 12 |

Trägt man nun die Amplitude über der Frequenz auf, so erhält man die Resonanzkurve:



Man erkennt, dass die Amplitude wie erwartet bei der Resonanzfrequenz ein ausgeprägtes Maximum aufweist.

In der Grafik wurde mit der Software xmgrace, die in jeder besseren Linux-Distribution enthalten ist, eine Funktion der Form

$$A(f) = \frac{c_0}{\sqrt{(c_1)^2 \cdot [\omega_0^2 - (2\pi f)^2 + (c_2)^2]^2 + (c_3)^2 \cdot (2\pi f)^2}}$$

angefittet (vgl. dazu Gl. (6) der Anleitung), wobei c_i ($i=1,2,3$) die Fitparameter und ω_0 die oben bestimmte Eigenfrequenz des gedämpften Oszillators ist. Die eingezeichnete Kurve folgt den Parametern (die Betrachtung hier soll ohne Einheiten erfolgen):

$$\begin{aligned}c_0 &= 606,076 \\c_1 &= 6,36265 \\c_2 &= 0,318549 \\c_3 &= 1,175\end{aligned}$$

Diese Funktion soll die Grundlage für unsere weiteren Betrachtungen bilden, da sie unsere Messwerte offenbar gut beschreibt (auf den signifikanten Unterschied für $f=0$ gehen wir weiter unten noch ein).

Durch Ableiten und Nullsetzen der Ableitung bestimmen wir zunächst die Resonanzfrequenz (wobei wir auf den Nachweis des Maximums hier verzichten, da es sich offensichtlich um eines handelt). Der Einfachheit halber wurden die folgenden Rechnungen mit einem Computeralgebrasystem durchgeführt, das entsprechende Worksheet findet sich im Anhang. Als Resonanzfrequenz ergibt sich demnach:

$$f_R \approx 0,51\text{Hz} \quad \text{bzw.} \quad \omega_R \approx 3,2\text{s}^{-1}$$

Wir möchten nun noch versuchen, den in der Anleitung gegebenen Zusammenhang zwischen der halben Halbwertsbreite $\Delta\omega$ (bzw. Δf) der Kurve und der Dämpfungskonstanten λ der gedämpften Schwingung

$$\Delta\omega = \lambda$$

aus unseren Messungen zu verifizieren.

Dazu bestimmen wir mit dem Computeralgebrasystem (siehe Anhang) diejenigen Frequenzen, bei denen unsere Amplitudenfunktion gerade den Wert $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A_{\max}$ annimmt, wobei A_{\max} die maximale Amplitude im Resonanzfall ist. Diese beiden Frequenzen sind

$$\begin{aligned}f_1 &\approx 0,493\text{s}^{-1} \\f_2 &\approx 0,523\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort die halbe Halbwertsbreite zu

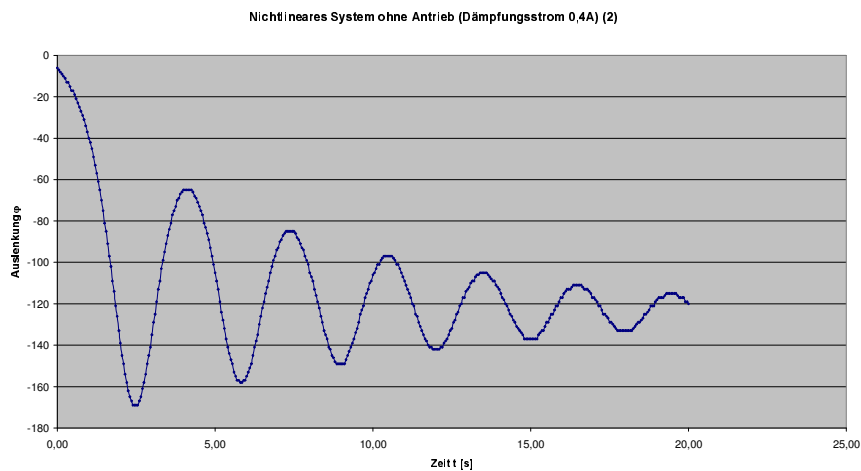
$$\Delta\omega = \frac{2\pi(f_2 - f_1)}{2} \approx 9,24 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}.$$

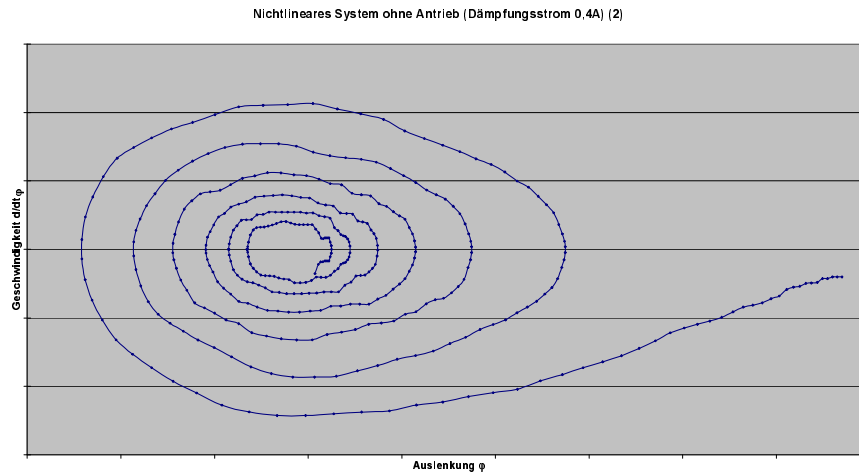
Dies deckt sich recht gut vor allem mit dem λ aus der manuellen Bestimmung, das aus den ersten 11 Schwingungen bei relativ geringen Fluktuationen der Parameter in $\varphi_{\max}(t) = a \cdot b^t$ berechnet wurde.

Betrachten wir zum Schluss dieses Abschnitts noch einmal den Fall $f=\omega=0$. Aus unserem Diagramm oder aus Gl. (6) der Anleitung erkennt man, dass die Amplitudenfunktion $A(f)$ auch an dieser Stelle einen endlichen Wert für A liefert. In der Praxis hingegen erhält man bei stehendem Motor aber (natürlich) überhaupt keine stationäre Schwingung, d.h. $A(f=0)=0$. Hier liegt also offenbar ein Unterschied zwischen dem theoretisch vorhergesagten und dem tatsächlich beobachteten Verhalten vor. Für beliebig kleine, endliche Anregungsfrequenzen liefert die in Abschnitt 2.1 beschriebene Lösung eine richtige Beschreibung, denn hier schwingt das System auch in der Praxis zumindest immer noch mit der Amplitude der Anregung. Für $f=0$ allerdings muss der Ansatz zur Lösung der DGL geändert werden, denn die Inhomogenität ist dann zeitlich konstant. Dies führt sofort auf eine konstante stationäre Lösung und somit auf $A=0$. Die Herleitung der obigen Amplitudenfunktion ist in diesem Grenzfall nicht gültig.

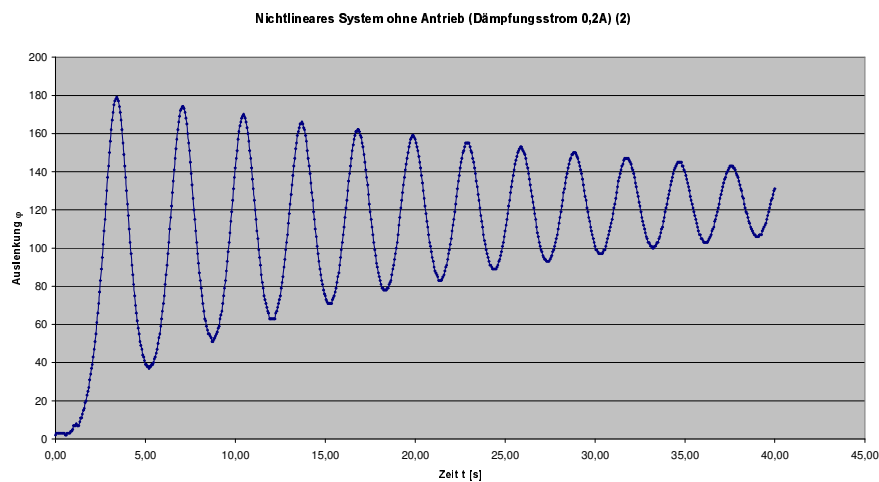
2.4 Ungetriebene, nichtlineare Schwingung

In diesem Versuchsteil soll das System wieder ohne Antrieb, dafür aber mit einem oben in der Mitte montierten Gewicht beobachtet werden. Wir haben das System, das sich nun nach der nichtlinearen, homogenen DGL (12) der Anleitung verhält, aus der Ruhelage als labilem Gleichgewichtszustand in eine Richtung ausschlagen lassen und die Schwingung mit dem Computer aufgezeichnet. Wir wollen hier nichts berechnen, aber dafür je ein Winkel-Zeit-Diagramm und ein Phasenraumdiagramm für zwei verschiedene Dämpfungsströme ($0,40 \pm 0,01$ bzw. $0,20 \pm 0,01$ A) betrachten:

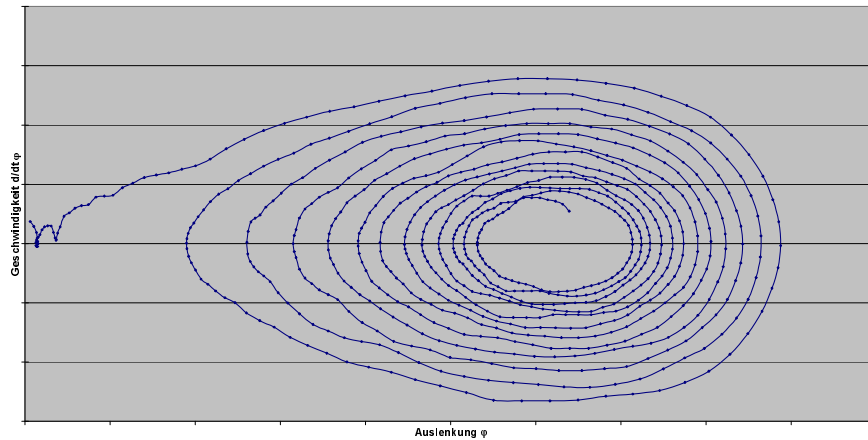




Im Schwingungsdiagramm sieht man den Unterschied zum linearen System zunächst vor allem an der Asymmetrie der Schwingung gegenüber der Nulllage als Ausgangsauslenkung, und daran, dass die Einhüllenden der Maxima und Minima nicht etwa gleich schnell abklingen. Richtig gut manifestiert sich die Nichtlinearität allerdings im Phasenraumdiagramm: Die Spirale ist nicht mehr elliptisch, sondern (im obigen Diagramm nach rechts) zu einem Ei ausgezogen. Diese Phänomene können wir genauso beim niedrigeren Dämpfungsstrom beobachten; allerdings schwingt das System hier etwas länger (und in die andere Richtung als oben, weil es aus der labilen Gleichgewichtslage zufällig in die andere Richtung verschoben wurde):



Nichtlineares System ohne Antrieb (Dämpfungsstrom 0,2A) - Phasenraumdiagr. (2)

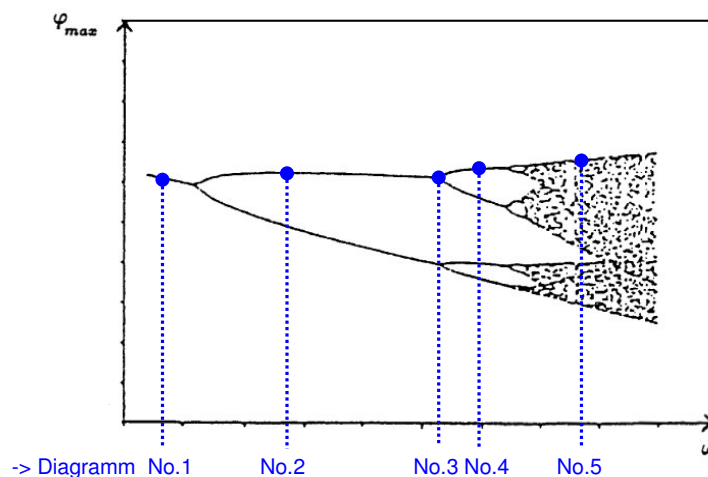


Wieder sieht man – hier besonders gut – die Eiform des Phasenraumdiagrammes (in diesem Diagramm nach links ausgezogen).

2.5 Nichtlineares, angetriebenes Pendel

Nachdem der Dämpfungsstrom wieder grob auf ca. 0,4A eingeregelt war, haben wir nun wieder den Antrieb eingeschaltet und beobachtet, wie das System bei verschiedenen Antriebsfrequenzen zu schwingen beginnt. Es verhält sich nun nach der inhomogenen, nichtlinearen DGL (13) der Anleitung.

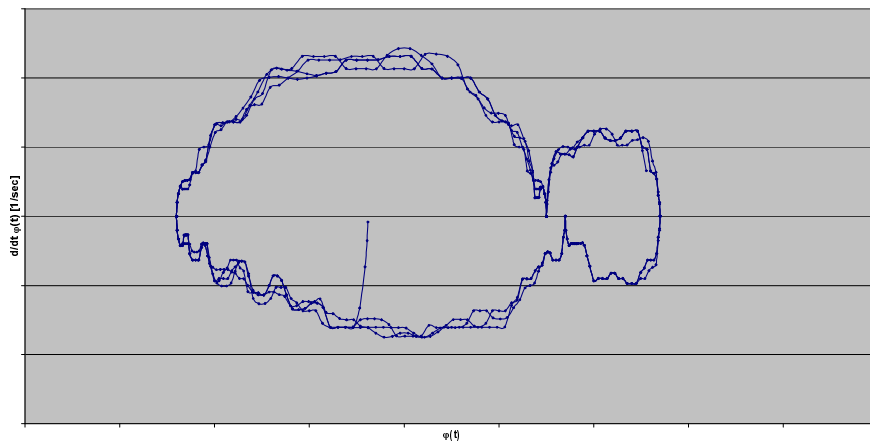
Aufgrund der bei nichtlinearen Systemen vorliegenden Amplituden-Frequenz-Kopplung wirkt sich eine (z.B. beim Einschwingen unweigerlich auftretende) Amplitudenerhöhung bei diesem System sofort auf die Resonanzfrequenz und damit auf die weitere Amplitudenentwicklung der Schwingung aus. Bei sehr niedriger Anregungsfrequenz fällt das Pendel nach einiger Zeit in einen stabilen Zustand, d.h. die Amplitude bleibt immer gleich; ist die Anregungsfrequenz höher, so besteht der stabile Zustand darin, dass das System zwischen zwei verschiedenen Amplituden wechselt. Mit weiter wachsender Frequenz existieren schließlich 4, 8, 16,... Amplituden im System; ab einem gewissen Punkt jedoch stellt sich überhaupt keine feste Amplitude mehr ein, und das System führt eine chaotische Schwingung aus (bei sehr hohem ω kann es wieder zu stabilen Schwingungen kommen). Die Amplitudenentwicklung in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz ist im folgenden sogenannten Feigenbaumdiagramm zu sehen; wir haben bereits die Zustände markiert, für die wir mit dem Computer Phasenraumdiagramme erstellt haben (folgen danach):



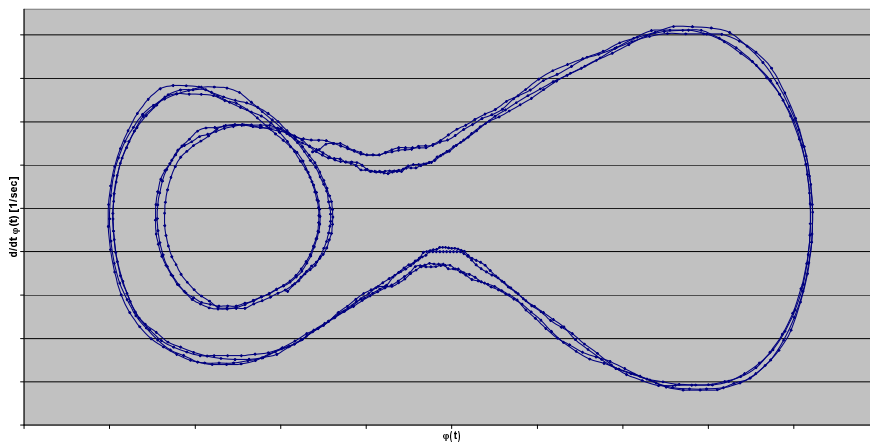
Die im Diagramm leicht zu erkennenden „Aufspaltungen“ der Schwingung in zwei, vier, acht, ... Amplitudenzustände mit wachsender Anregungsfrequenz nennt man 1., 2., 3., ... Bifurkation; rechts münden die Aufspaltungen in den Zustand des Chaos.

Nun bringen wir zum Abschluss die aufgenommenen Phasenraumdiagramme. Die Anzahl der vorhandenen Amplituden lässt sich aus der Anzahl der geschlossenen Wege in den Diagrammen ersehen; in einem der Diagramme, in dem drei (!) solche Wege zu erkennen sind, haben wir wohl einen Zustand in der 2. Bifurkation erwischt.

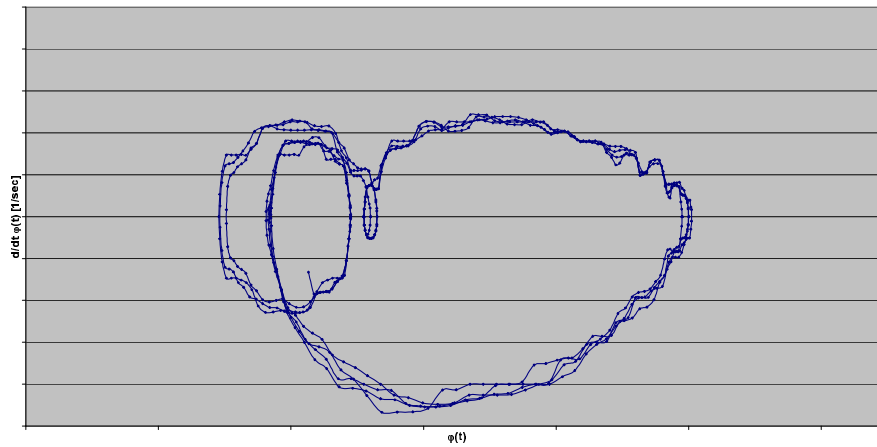
Phasenraum-Diagramm vor der 1. Bifurkation



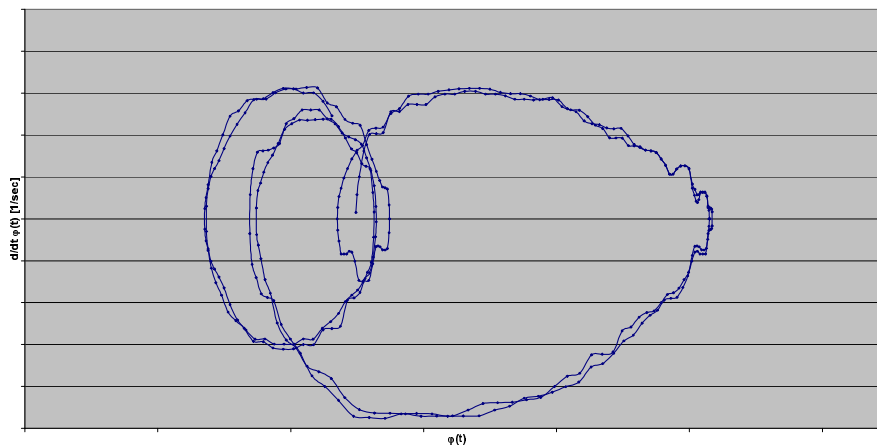
Phasenraum-Diagramm nach der 1. Bifurkation



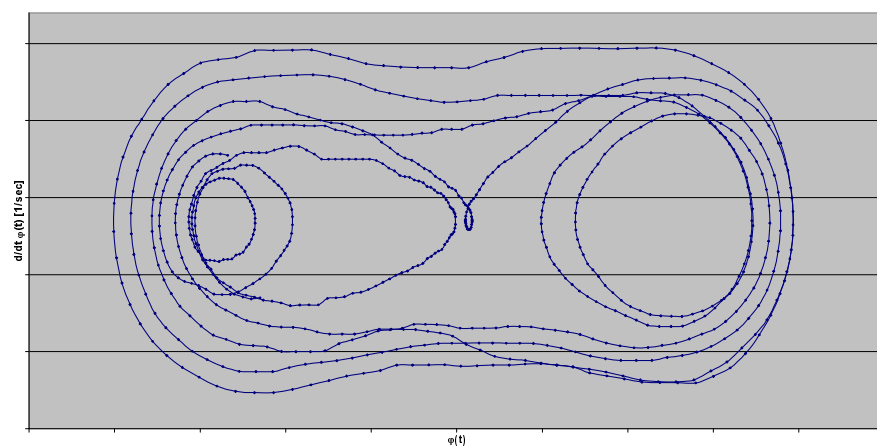
Phasenraum-Diagramm innerhalb der 2. Bifurkation



Phasenraum-Diagramm nach der 2. Bifurkation



Phasenraum-Diagramm im absoluten Chaos



In diesem letzten Diagramm wiederholt sich keiner der Wege des Pendels: Wir sind also im Zustand des Chaos angelangt.