

Versuch: Röntgenstrahlen (07.05.2002)

Inhalt:

- | | |
|---|----------|
| 1. Einführung zum Versuch | Seite 1 |
| 2. Messungen und Bearbeitung der Aufgaben | Seite 1 |
| 3. Beantwortung der Fragen | Seite 10 |

1. Einführung zum Versuch

Im vorliegenden Versuch sollen mit einer Röntgenröhre und unter Ausnutzung des Prinzips der Bragg-Reflexion folgende Aufgaben durchgeführt werden:

- Messung des Röntgenspektrums der Molybdänanode. **Bestimmung der K_{α} - und K_{β} -Wellenlängen** der charakteristischen Röntgenstrahlung, bei Beugung an NaCl-Kristall **mit bekannter Gitterkonstante**.
- Beobachtung des **statistischen Charakters** der Zählrate bei bestimmten Wellenlängen.
- Erstellung einer **Transmissionskurve** bei Absorption der Strahlen durch eine Zirkonfolie. Ermittlung der **K-Absorptionskante des Zirkons**.
- **Bestimmung des Netzebenenabstands** (parallel zu den Spaltflächen) eines LiF-Kristalls bei **bekanntem Wellenlängen**. Ermittlung seiner Gitterkonstante.
- Mehrfache Aufnahme der **kurzwelligigen Bremsstrahlungs-Spektrengrenze** für verschiedene Beschleunigungsspannungen zur **Ermittlung des Planckschen Wirkungsquantums**.

Vorweg sei noch auf ein Problem bei der Durchführung hingewiesen: bei allen Versuchen kommt es darauf an, dass die sog. $\vartheta - 2\vartheta$ -Kopplung in der Anordnung exakt ist, d.h. dass das Zählrohr immer unter dem doppelten Einfallswinkel der Strahlung steht. Normalerweise wird dies am Anfang des Versuchs entsprechend einjustiert und arretiert. Wir wurden aber von unserem Betreuer angewiesen, diesen Schritt nicht durchzuführen und mit der vorgefundenen Einstellung zu messen. Über deren Exaktheit können wir keine Aussage treffen. Insbesondere fiel uns auf, dass bei einem Einfallswinkel von 0° die Zählrohrskala ca. 3° anzeigte, wobei der Betreuer darauf hinwies, dass die Anzeige für das Zählrohr nicht stimme, die Einfallswinkelanzeige aber korrekt sei. Den Fehler, der hier evtl. zu berücksichtigen ist, konnten wir daher leider nicht exakt bestimmen, sondern allenfalls schätzen (siehe unten bei den entsprechenden Fehlerrechnungen).

2. Messungen und Bearbeitung der Aufgaben

Die Messungen wurden mit einem nach Anleitung mit dem Goniometerantrieb gekoppelten X-Y-Schreiber aufgenommen. Hierbei war darauf zu achten, dass die Messung erst bei einem Winkel von 2° begonnen wurde, da bei Winkeln unter 2° die Röntgenröhre direkt und ohne Beugung der Strahlung am Kristall in den Detektor einstrahlt, was wertlose Detektionsraten liefert. Zudem wurde der Winkelbereich immer vom kleineren zum größeren Winkel durchfahren, um eventuelle Fehler durch Spiel im Goniometerantrieb zu vermeiden.

Zunächst wurde ein Nullabgleich des X-Y-Schreibers durchgeführt, und dann auf den Blättern die Winkelskala festgelegt, indem der Motor vorgefahren und bei Werten von 5° , 10° , 15° , ... auf der Kristallwinkel-Skala (Röntgengerät) jeweils mit dem X-Y-Schreiber ein kleiner Strich in Y-

Richtung gezogen wurde (mittels Y-Offsetverstellung aus dem Nullpunkt an der Blattunterseite heraus). Die Nullpunkte für Winkel und Intensität wurden durch „Einzeichnen“ von Koordinatenachsen ebenfalls mittels Intensitäts- bzw. Winkel-Offsetverstellung am Schreiber festgelegt. Für das Zählrohr war für alle Versuche eine Spannung von ca. 460V eingestellt.

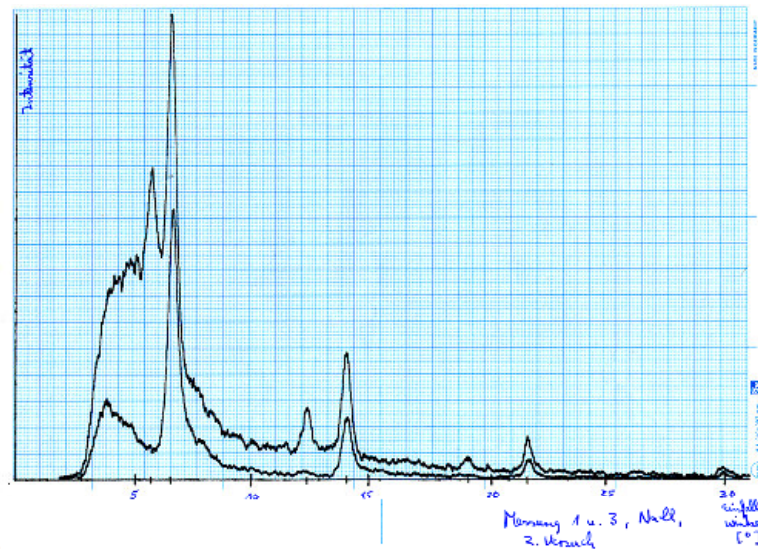
2.1 Aufgabe 1: Röntgenspektrum der Molybdänanode

Einstellungen zum Versuch:

Beschleunigungsspannung: Stufe 6

Schreiber-Skalierungsfaktoren: X: 0,2V/cm, Y: ca. 0,8V/cm („variabel“-Einstellung)

Hier zunächst das erzielte Spektrum (die obere Linie gehört zu dieser Aufgabe, die untere zu 2.3):



Für diese Messung haben wir zwei Anläufe gebraucht, weil wir das Ergebnis mittels Millimeterpapier nochmals optimieren wollten. Zudem haben wir den Y-Skalierungsfaktor mittels der Einstellmöglichkeit „variabel“ erhöht, um die Blatthöhe auszunutzen. Die ungefähre Y-Skalierungsangabe wurde aus dem Verhältnis der Peakgrößen beim zweiten und ersten Versuch sowie der festen Standardauflösung beim ersten Versuch (0,5V/cm) errechnet.

Mittels der Bragg-Bedingung: $\lambda = \frac{2d \sin \vartheta_n}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), wo n die Ordnung des Maximums, d

der Netzebenenabstand und ϑ_n der für das Maximum beobachtete Glanzwinkel ist, lässt sich aus dem auf dem Millimeterpapier abgelesenen Winkel für jede Linie sofort die zugehörige Wellenlänge berechnen. Nach Abb. 15 der Anleitung ist bei NaCl die Gitterkonstante genau gleich dem zweifachen Netzebenenabstand d . Somit lautet für den verwendeten Kristall die Bragg-Bedingung:

$$\lambda = \frac{a \sin \vartheta_n}{n} = \frac{564,94 \text{ pm} \cdot \sin \vartheta_n}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Zunächst berechnen wir nun die geforderten Wellenlängen. Hierzu wird zunächst der Winkel der Maxima aus der Skala abgelesen. Dafür benutzen wir eine stückweise lineare Näherung, d.h. es wird angenommen, der Winkel steige zwischen zwei Skalenstrichen linear an. Es ergeben sich für die Funktion Winkel(Abstand vom Skalenstrich vor dem zu ermittelnden Winkel) folgende Formeln:

Winkelbereich:	Formel:
zwischen 5° und 10°	$\vartheta \approx 5^\circ + \frac{5^\circ}{4,4\text{cm}} \cdot d_{x5}$ (d_{x5} : Abstand von dem zu ermittelnden Winkel auf der Skala zum 5°-Skalenstrich; 4,4 cm: Abstand zwischen dem 5°- und dem 10°-Skalenstrich)
zwischen 10° und 15°	$\vartheta \approx 10^\circ + \frac{5^\circ}{4,5\text{cm}} \cdot d_{x10}$
zwischen 15° und 20°	$\vartheta \approx 15^\circ + \frac{5^\circ}{4,7\text{cm}} \cdot d_{x15}$
zwischen 20° und 25°	$\vartheta \approx 20^\circ + \frac{5^\circ}{4,4\text{cm}} \cdot d_{x20}$

Hieraus erhält man sofort folgende Winkel und mit der Bragg-Bedingung auch Wellenlängen für die zu ermittelnden Linien des char. Röntgenspektrums:

Linie, Ordnung des Max.:	Winkel:	Wellenlänge:	Energie (hc/λ):
K _α (1. Ordnung)	$d_{\alpha 1-5} \approx 1,4\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 6,6^\circ$	$\lambda \approx 6,5 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 19keV
K _α (2. Ordnung)	$d_{\alpha 2-10} \approx 3,7\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 14^\circ$	$\lambda \approx 6,9 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 18keV
K _α (3. Ordnung)	$d_{\alpha 3-20} \approx 1,4\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 22^\circ$	$\lambda \approx 6,9 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 18keV
<u>Durchschnitt K_α:</u>			≈ 18keV (Lit.: 17,4)
K _β (1. Ordnung)	$d_{\beta 1-5} \approx 0,6\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 5,7^\circ$	$\lambda \approx 5,6 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 22keV
K _β (2. Ordnung)	$d_{\beta 2-10} \approx 2,1\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 12^\circ$	$\lambda \approx 6,0 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 21keV
K _β (3. Ordnung)	$d_{\beta 3-15} \approx 3,8\text{cm} \Rightarrow \vartheta \approx 19^\circ$	$\lambda \approx 6,1 \cdot 10^{-11}\text{m}$	E ≈ 20keV
<u>Durchschnitt K_β:</u>			≈ 21keV (Lit.: 19,7)

Hierbei ist anzumerken, dass, um die Aufschaukelung von Rundungsfehlern zu vermeiden, stets mit nicht gerundeten Zwischenergebnissen weitergerechnet wurde, und jeweils nur die Tabellen-Endergebnisse gerundet wurden. Der Literaturwert für die K_α-Linie entstand durch eine gewichtete Mittelwertbildung aus Energiewerten für die K_{α1}- und K_{α2}-Linien (Quelle der Energiewerte sowie der Intensitätsaufteilung als Wichtungsfaktoren: Karlsruher Nuklidkarte 1998). Entsprechendes gilt für den K_β-Literaturwert. Es wurde also angenommen, dass die relativ nahe beieinanderliegenden Linien zusammen zum entsprechenden Peak beitragen.

Nun zur Fehlerrechnung:

Statistische Fehler, die beim Versuch auftreten, sind:

- Ablesegenauigkeit der Gradskala am Röntgengerät bei Eichung der Skala auf dem Papier: +/- 0,2°
- Ablesefehler auf dem Papier: +/- 1 mm und statistische Schreiberungenauigkeiten (leichte Blattverschiebung während Versuch etc.): +/- 0,25mm entspricht im ungünstigsten Fall

(„stückweiser Umrechnungsfaktor“ in Grad maximal) $1,25\text{mm} \cdot \frac{5,0^\circ}{44\text{mm}} \approx 0,14^\circ$

Diese Fehler addieren sich, weil statistisch unabhängig, quadratisch zu

$$(\sqrt{0,2^2 + 0,14^2})^\circ \approx 0,25^\circ.$$

- Systematische Fehler, die beim Versuch auftraten, kann man nicht genau bestimmen. Jedoch lässt die relativ hohe Abweichung nach oben, die bei beiden Mittelwerten auftritt, auf eine Fehleichung der Gradskala entweder auf dem Papier oder bei der Röntgenröhre schließen. Wir schätzen sie grob auf $0,5^\circ$. Dies liegt größenordnungsmäßig nahe, da z.B. für $\vartheta=0^\circ$ die 2ϑ -Anzeige den Wert 3° anzeigte. Da dieser Fehler immer in eine Richtung auftritt und sich nicht mit anderen Fehlern kompensieren kann, wird er linear addiert:

$$\Delta\vartheta_{ges} \approx |0,25^\circ| + |0,5^\circ| = 0,75^\circ \approx 0,013rad$$

Hieraus resultiert schlussendlich mit $\lambda = \frac{a \sin \vartheta_n}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $\Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{h \cdot c \cdot n}{a \cdot \sin \vartheta_n}$

ein Energiefehler von:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta}\right)^2 (\Delta\vartheta_{ges})^2} = \left| \frac{hc}{a} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \cdot \Delta\vartheta_{ges} \right|$$

sowie ein Fehler der Wellenlänge von:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta}\right)^2 (\Delta\vartheta_{ges})^2} = \left| \frac{a}{n} \cdot \cos \vartheta \cdot \Delta\vartheta_{ges} \right| \text{ (wobei die Winkel im Bogenmaß einzusetzen sind)}$$

Für die einzelnen Linien ist das:

<u>Linie, Ordnung des Max.:</u>	<u>Winkel:</u>	<u>Wellenl. ca.:</u>	<u>Energie (hc/λ):</u>	<u>Energiefehler:</u>	<u>Fehler der Wellenl.:</u>
K _α (1. Ordnung)	$\vartheta \approx 6,6^\circ \approx 0,12rad$	65pm	E ≈ 19keV	ΔE ≈ 2keV	Δλ ≈ 7,3pm
K _α (2. Ordnung)	$\vartheta \approx 14^\circ \approx 0,24rad$	69pm	E ≈ 18keV	ΔE ≈ 0,5keV	Δλ ≈ 3,6pm
K _α (3. Ordnung)	$\vartheta \approx 22^\circ \approx 0,38rad$	69pm	E ≈ 18keV	ΔE ≈ 0,2keV	Δλ ≈ 2,3pm
<u>Durchschn. K_α:</u>			≈ 18keV (Lw: 17,4)	≈ 0,9keV	≈ 4,4pm
K _β (1. Ordnung)	$\vartheta \approx 5,7^\circ \approx 0,10rad$	56pm	E ≈ 22keV	ΔE ≈ 3keV	Δλ ≈ 7,4pm
K _β (2. Ordnung)	$\vartheta \approx 12^\circ \approx 0,22rad$	60pm	E ≈ 21keV	ΔE ≈ 0,6keV	Δλ ≈ 3,7pm
K _β (3. Ordnung)	$\vartheta \approx 19^\circ \approx 0,33rad$	61pm	E ≈ 20keV	ΔE ≈ 0,3keV	Δλ ≈ 2,5pm
<u>Durchschn. K_β:</u>			≈ 21keV (Lw: 19,7)	≈ 1,3keV	≈ 3,7pm

Hierbei wurde der Fehler des Durchschnitts jeweils durch lineare Fortpflanzung der drei Einzelfehler (z.B.: $1/3 \cdot (\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3)$) bestimmt, da diese zum größeren Teil vom syst. Fehler bestimmt werden, der eine statistische Abhängigkeit der Einzelenergiefehler bedingt. Somit liegen die Messwerte im errechneten Toleranzbereich um die Literaturwerte.

2.2 Aufgabe 2: Pulsanzeige mit Lautsprecher – statistisches Auftreten von Erregungen des Zählrohrs

Wenn bei einem Winkel die Abstrahlintensität recht niedrig ist, so hört man, dass die Impulsrate zeitlich stark schwankt. Dies kommt daher, dass...

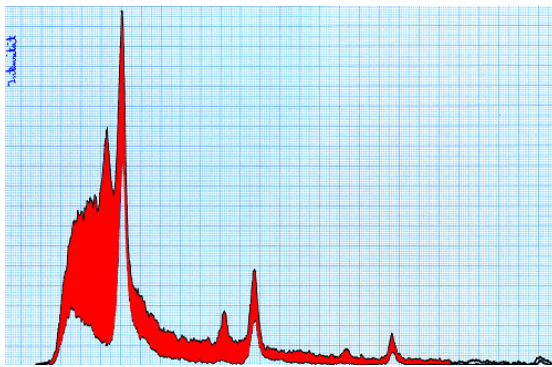
- einerseits die Energiemengen der erzeugten Röntgenquanten statistisch verteilt sind, weil ein auftreffendes Elektron viele Möglichkeiten für Energieabgabeprozesse hat (Abbremsung ein-

oder mehrstufig, Herausschlagen von Elektronen aus inneren Atomschalen). Bei niedriger durchschnittlicher Impulsrate kann es so zu starken relativen Schwankungen der in einem Energiebereich pro Zeit erzeugten Photonenzahl kommen.

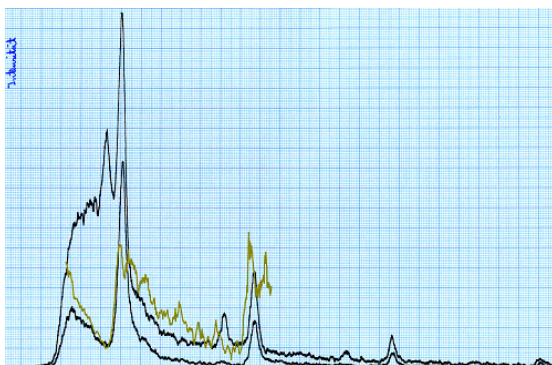
- und es andererseits mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorkommen kann, dass ein in das Zählrohr einfallendes Quant keinen Ionisationsstoß verursacht, sondern den Detektor ohne Wechselwirkung wieder verlässt, oder dass evtl. je nach Versuchsaufbau eine Anzahl Quanten gar nicht erst ins Zählrohr eintreten. Diese Prozesse sind auch statistischer Natur.

2.3 Aufgabe 3: Messung der Absorption in Zirkon

Für diese Messung wurden sinnvollerweise dieselben Einstellungen wie unter 2.1 verwendet, da in dasselbe Diagramm geschrieben wird. Die untere Kurve im Diagramm bei 2.1 ist die Spektrumskurve mit Zirkonabsorber (Beugung weiterhin an einem NaCl-Kristall). Um eine Transmissionskurve (Intensität mit Absorber durch Intensität ohne Absorber in Abhängigkeit von der Wellenlänge) zu erhalten ist es nun notwendig, die Kurven durcheinander zu dividieren. Dies wurde entgegen des Vorschlages der Praktikumsanleitung hier von einem selbstgebauten Computerprogramm (Quelltext anbei) erledigt. Es bearbeitet in 3 Schritten den Diagrammausschnitt, den man im Bildbearbeitungsprogramm erzeugt hat:

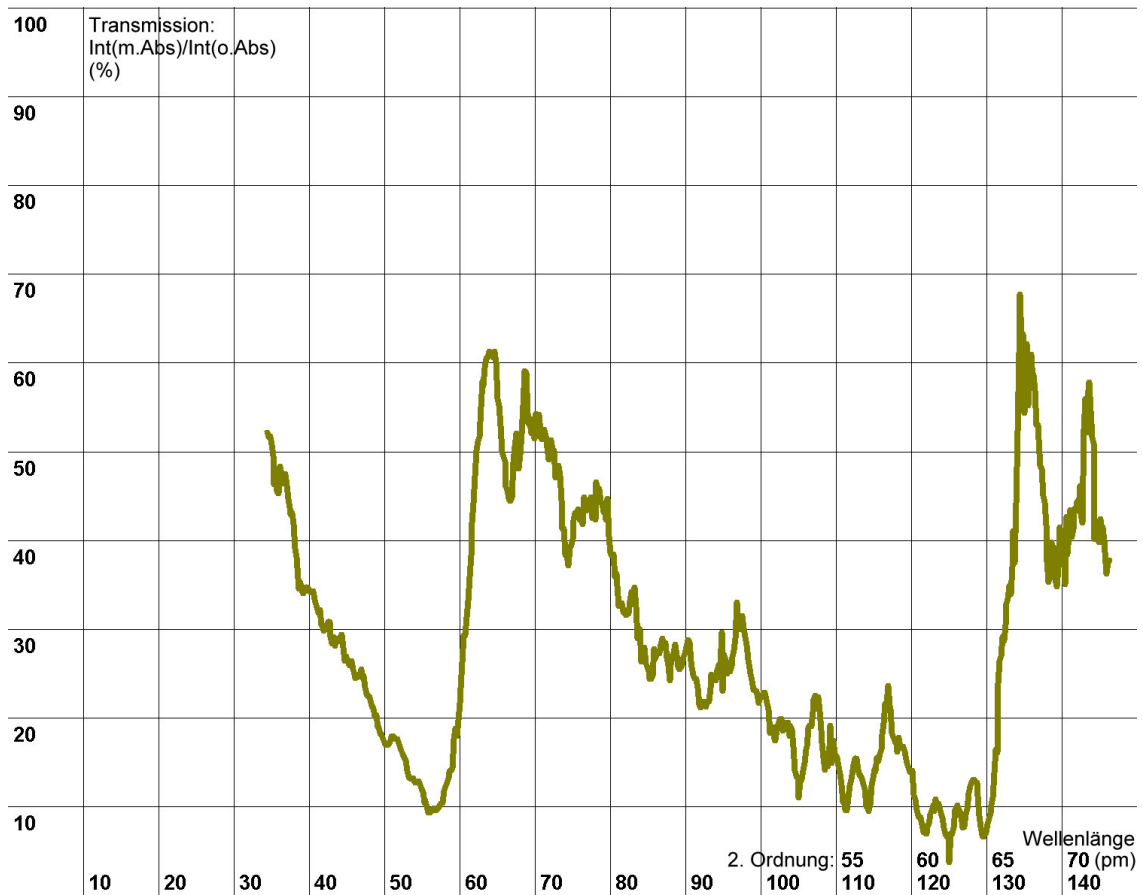


Zunächst wird der Zwischenraum zwischen den Kurven, d.h. möglichst die Mitte der unteren bis zur Mitte der oberen Kurve, rot eingefärbt.



Dann errechnet es aus den Ober- und Untergrenzen des roten Bereiches die Transmissionskurve (oliv) in Abhängigkeit vom Winkel. Hierbei kann gleichzeitig ein noch während des Versuches festgestellter, ungewollter Offset der unteren Kurve (+1mm nach rechts) korrigiert werden (siehe Quellcode).

Schließlich erzeugt das Programm auch noch die in der Aufgabenstellung gewünschte Darstellung der Transmissionskurve in Abhängigkeit von λ :



Wir betrachten hier nur ungefähr den in der Anleitung angegebenen Wellenlängenbereich, weil sich bei größeren Ablenkwinkeln die Spektren erster, zweiter und höherer Ordnung überlagern und die dort gelegenen Peaks keine wirklich zuverlässigen Aussagen über die Absorptionscharakteristik des Zircons liefern würden. Hier dagegen sind die Überlagerungen eher gering und man kann bei ca. 64pm (1. Ordnung) / 67pm (2. Ordnung) gut die K-Absorptionskante von Zirkon erkennen. An dieser nimmt die Durchlässigkeit der Folie mit steigender Energie / geringerer Wellenlänge plötzlich stark ab, weil die Röntgenstrahlen mit „mindestens Kantenenergie“ genug Energie haben, um Elektronen aus den inneren Schalen aus den Atomen von Zirkon herauszuschlagen. Die Wellenlänge der Kante entspricht einer Quantenenergie von ca. 19keV. Die K_{β} -Linie von Molybdän wird daher vom Zirkon sehr stark absorbiert, während die K_{α} -Linie durch das Filter relativ stark durchschlägt.

Wodurch sind nun Fehler für diese Wellenlängenmessung zu erwarten?

- Ablesegenauigkeit der Gradskala am Röntgengerät bei Eichung der Skala auf dem Papier: $\pm 0,2^{\circ}$ (**statistischer** Fehler)
- **Statistische** Schreiberungenauigkeiten (leichte Blattverschiebung etc.): $\pm 0,25$ mm entspricht im ungünstigsten Fall („stückweiser Umrechnungsfaktor“ in Grad maximal)

$$0,5\text{mm} \cdot \frac{5,0^{\circ}}{44\text{mm}} \approx 0,03^{\circ}$$
- Ablesegenauigkeit der Wellenlänge auf dem endgültigen Transmissionsdiagramm: $\Delta\lambda$ ist ca. 1 pm (recht genau durch Pixelwert-Ablesen) (**statistisch**)

- **Systematische** Schreiberungenauigkeiten, die durch die Korrektur im Programm nicht erkannt werden (entspr. bis zu ca. 0,5mm): $0,5\text{mm} \cdot \frac{5,0^\circ}{44\text{mm}} \approx 0,06^\circ$ mit obiger Fehlerabschätzungsmethode.
- **Systematische** Abweichung der Gradskala am Röntgengerät (siehe auch oben): ca. $0,5^\circ$

Nun wird man sich denken, dass auf dem Millimeterpapier ja 2 fehlerbehaftete Kurven vorhanden sind und das noch nicht berücksichtigt wurde. Wir schätzen jedoch an dieser Stelle ab, dass auch durch Verschiebungen der Kurven gegeneinander etc. die Verschiebung der Peaks der endgültigen Kurve im Normalfall nicht weiter ist als die Verschiebung einer Ausgangskurve ist. Dies hängt freilich hauptsächlich von der Kurvenform ab.

Der insgesamt Winkelfehler in Grad ergibt sich durch folgende Rechnung (dabei werden zunächst die statistischen Fehler quadratisch, die systematischen Fehler linear und dann der statistische mit dem systematischen Gesamtfehler linear addiert):

$$\Delta\vartheta_{ges} = \left| \left(\sqrt{0,2^2 + 0,03^2} \right)^\circ \right| + |0,06^\circ| + |0,5^\circ| \approx 0,76^\circ \approx 0,013\text{rad}$$

Im Spektrum 1. Ordnung tritt die Kante (ebenso wie die K_α -Linie von Mo) bei einem Winkel von ca. $6,6^\circ$, also ca. $0,12\text{rad}$ auf, im Spektrum 2. Ordnung bei ca. 14° , d.h. ca. $0,24\text{rad}$. Dies erhält man sofort mit relativ großer Genauigkeit aus der zweiten vom Auswerteprogramm generierten Kurve. Somit ergibt sich aus dem Winkelfehler ein Wellenlängenfehler von:

$$\Delta\lambda_1 = \left| \frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta} \cdot \Delta\vartheta_{ges} \right| = \left| a \cdot \cos\vartheta_1 \cdot \Delta\vartheta_{ges} \right| \approx 7,4\text{pm} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\lambda_2 = \left| 0,5 \cdot a \cdot \cos\vartheta_2 \cdot \Delta\vartheta_{ges} \right| \approx 3,6\text{pm}$$

Dieser wird nun, da er wesentlich durch den statistischen Fehler der Gradskala bestimmt ist, linear mit dem statist. Fehler für das Ablesen der Wellenlänge auf dem Transmissionsdiagramm addiert; es ergibt sich ein Gesamtfehler für die Wellenlänge der Absorptionskante von:

$$\Delta\lambda_{ges,1} \approx 7,4\text{pm} + 1\text{pm} = 8,4\text{pm} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\lambda_{ges,2} \approx 3,6\text{pm} + 1\text{pm} = 4,6\text{pm}$$

Dies entspricht ca. 13% bzw. 6,9% der jeweiligen Linienwellenlänge. Die Linie weicht von Literaturwerten (ca. 71pm) im Rahmen des errechneten Toleranzbereiches ab.

Der Mittelwert der beiden Messwerte incl. wie oben lin. fortgepflanztem Fehler ist: $66 \pm 6,5$ pm, ein recht guter Wert.

2.4 Aufgabe 4: Röntgenbeugung an Lithiumfluorid

In diesem Versuch wird die aus Aufgabe 1 bekannte Wellenlänge der K_α -Linie der Röntgenröhre dazu benutzt, den Netzebenenabstand von LiF zu bestimmen. Es wurde also ein Spektrum der Röntgenstrahlung mit LiF als Kristall zur Bragg-Reflexion aufgenommen, wobei die in der Praktikumsanleitung empfohlenen Einstellungen an der Röhre und am Schreiber beibehalten wurden. Das erhaltene Diagramm kann dem Protokollheft entnommen werden. Man erkennt darin, dass eine Auswertung der K_α -Linie in erster und zweiter Beugungsordnung möglich ist. Mit der unter Aufgabe 1 geschilderten Vorgehensweise über stückweise lineare Näherungen und den dort geschilderten Überlegungen zur Messgenauigkeit erhält man folgende Glanzwinkel:

$$1. \text{ Ordnung:} \quad 9,3^\circ \pm 0,75^\circ \quad (0,16 \text{ rad} \pm 0,013 \text{ rad})$$

2. Ordnung: $20,2^\circ \pm 0,75^\circ$ ($0,35 \text{ rad} \pm 0,013 \text{ rad}$)

Mit der von uns bestimmten K_α -Linien-Wellenlänge von $\lambda = 6,8 \cdot 10^{-11} \text{ m} \pm 0,4 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ kann man daraus den Netzebenenabstand von LiF errechnen. Aus der Bragg-Bedingung ergibt sich

$$d = \frac{n \cdot \lambda}{2 \cdot \sin \vartheta} \quad (\text{wobei } n=1 \text{ bzw. } n=2).$$

Entsprechend gewinnt man mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz eine Beziehung für den Fehler von d:

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial \lambda}\right)^2 \cdot (\Delta \lambda)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot (\Delta \vartheta)^2} = \sqrt{\left(\frac{n}{2 \sin \vartheta}\right)^2 \cdot (\Delta \lambda)^2 + \left(\frac{-n \cdot \lambda}{2 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta\right)^2 \cdot (\Delta \vartheta)^2}$$

Dabei muss man beachten, dass die Winkel im Bogenmaß eingesetzt werden müssen.

Man erhält schließlich:

aus der 1. Ordnung: $d = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \pm 0,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

aus der 2. Ordnung: $d = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ m} \pm 0,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Mittelwert: $\bar{d} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ m} \pm 0,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Literaturwert: $d_{\text{LiF}} = 201 \text{ pm}$

Auch hier haben wir analog oben beim Mittelwert eine lineare Fortpflanzung für die Fehler der Einzelwerte gewählt (d.h. sie addiert und durch zwei geteilt), weil der oben beschriebene systematische Fehler ggü. dem statistischen Anteil überwiegt.

Unter der Annahme, dass der LiF-Kristall analog wie der NaCl-Kristall aufgebaut ist, d.h. dass die Gitterkonstante a mit dem in diesem Versuch gemessenen Netzebenenabstand d über die Beziehung $a = 2 \cdot d$ zusammenhängt, ergibt sich aus unserer Messung: $a = 4,0 \cdot 10^{-10} \text{ m} \pm 0,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

2.5 Aufgabe 5: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Bei diesem Versuch soll das Plancksche Wirkungsquantum h aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenspektrums bestimmt werden. Man nutzt dabei aus, dass die kürzestmögliche Wellenlänge λ_g gerade dann ausgesandt wird, wenn ein Elektron (das in der Röhre durch die Spannung U beschleunigt wurde und daher die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = e \cdot U$ besitzt) seine Energie in einem einzigen Stoßprozess abgibt und in Form von Röntgenstrahlung aussendet. Daraus ergibt sich die Beziehung, aus der sich h bestimmen lässt:

$$e \cdot U = \frac{h \cdot c}{\lambda_g} \Leftrightarrow h = \frac{\lambda_g \cdot e \cdot U}{c}$$

bzw. mit $\lambda_g = 2d_{\text{LiF}} \cdot \sin(\vartheta_g)$:

$$h = \frac{2d_{\text{LiF}} \cdot \sin(\vartheta_g) \cdot e \cdot U}{c}$$

Im Versuch wurde λ_g für verschiedene Beschleunigungsspannungen U bestimmt, indem Spektren mit dem LiF-Kristall bei verschiedenen Hochspannungsstufen aufgenommen wurden (Schreibereinstellungen wie in der Praktikumsanleitung empfohlen).

Die Messung der Beschleunigungsspannung U erfolgt dabei nicht direkt, sondern an der Röntgenröhre lässt sich eine Wechselspannung abgreifen, die einem tausendstel von U entspricht. Man erhält dann die gesuchte Spannung durch $U = \sqrt{2} \cdot 1000 \cdot U_{\text{gemessen}}$, wobei der Faktor $\sqrt{2}$ zu berücksichtigen ist, weil das Voltmeter (wie üblich) den Effektivwert der Wechselspannung anzeigt, für die Rechnung aber natürlich der Scheitelwert gebraucht wird, der bei einer sinusförmigen Span-

nung gerade das $\sqrt{2}$ -fache des Effektivwertes ist:

HV-Stufe	$U_{\text{gemessen}} [V]$	$U [kV]$
2	17,48±0,10	24,72±0,14
3	19,51±0,02	27,59±0,03
4	21,0±0,1	29,7±0,1
5	23,1±0,1	32,7±0,1
6	25,2±0,1	35,6±0,1
7	27,2±0,1	38,5±0,1
8	29,9±0,1	42,3±0,1

Wie aus den Spektren im Protokollheft zu erkennen ist, findet man nicht genau eine scharfe untere Grenzwellenlänge. Die Schnittpunkte der Kurven mit der x-Achse können statt dessen nur durch Extrapolation in Richtung kürzerer Wellenlängen abgeschätzt werden. Entsprechende Trendlinien wurden in das Diagramm eingetragen. Natürlich kann auf diese Weise der Grenzwinkel nicht exakt bestimmt werden, die Extrapolation ergibt eine Unsicherheit von ungefähr $\pm 5\text{mm}$, das entspricht beim vorliegenden Achsenmaßstab ca. $\pm 0,3^\circ$. Weiterhin muss man analog zu Aufgabe 1 weitere statistische Fehlerquellen wie folgt berücksichtigen:

- Ableseungenauigkeit auf der Skala der Röntgenröhre: $\pm 0,2^\circ$
- Ablese- und Schreibergenauigkeit sind hier aufgrund des doppelt so großen x-Achsen-Maßstabs nur halb so groß wie in Aufgabe 1: $\pm 0,07^\circ$

Somit ergibt sich der gesamte statistische Fehler zu $\Delta\vartheta_{\text{stat}} = \sqrt{(0,3^\circ)^2 + (0,2^\circ)^2 + (0,07^\circ)^2} \approx \pm 0,4^\circ$.

Dazu addiert sich der beschriebene systematische Fehler linear. Der Gesamtfehler ist also ca.

$$\Delta\vartheta_g = \pm 0,8^\circ (\approx 0,01\text{rad}).$$

HV-Stufe	$\vartheta_g [^\circ, (rad)]$
2	7,2±0,8 (0,13±0,01)
3	6,1±0,8 (0,11±0,01)
4	5,5±0,8 (0,096±0,01)
5	4,8±0,8 (0,085±0,01)
6	4,4±0,8 (0,076±0,01)
7	4,1±0,8 (0,071±0,01)
8	3,5±0,8 (0,061±0,01)

Nun kann h aus oben genannter Gleichung und mit $d_{\text{LIF}} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{m} \pm 0,3 \cdot 10^{-10} \text{m}$ aus Messung 4 bestimmt werden. Wiederum erhält man die zugehörige Messunsicherheit über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial d_{\text{LIF}}}\right)^2 (\Delta d_{\text{LIF}})^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta_g}\right)^2 (\Delta \vartheta_g)^2} = \\ &= \frac{2e}{c} \sqrt{(d_{\text{LIF}} \sin \vartheta_g \cdot \Delta U)^2 + (U \sin \vartheta_g \cdot \Delta d_{\text{LIF}})^2 + (d_{\text{LIF}} \cdot U \cos \vartheta_g \cdot \Delta \vartheta_g)^2} \end{aligned}$$

Dabei sind alle Winkel wieder im Bogenmaß einzusetzen. Wir erhielten folgendes Ergebnis:

HV-Stufe	H [10^{-34} Js]
2	$6,7 \pm 0,9$
3	$6,3 \pm 1,0$
4	$6,1 \pm 1,0$
5	$6,0 \pm 1,1$
6	$5,9 \pm 1,2$
7	$5,9 \pm 1,3$
8	$5,5 \pm 1,4$

Mittelwert: $\bar{h} = 6,1 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \pm 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Literaturwert: $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Aufgrund des überwiegend systematischen Fehlers wurden die Einzelfehler bei der Mittelwertbildung wie schon zuvor linear fortgepflanzt (also gemittelt). Man erkennt, dass der Literaturwert von h innerhalb der errechneten Fehlerschranken liegt.

3. Beantwortung der Fragen

3.1 Röntgenspektrum vs. hier ermittelte Diagramme

Es sind folgende Unterschiede zwischen den hier ermittelten Intensitätsdiagrammen in Abhängigkeit vom Winkel und einem normalen Röntgenspektrum zu beachten:

- Ein Röntgenspektrum ist eine Auftragung der Emissionsrate in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Hier findet sich eine Auftragung in Abhängigkeit vom Winkel, wobei Winkel und Wellenlänge nicht proportional zueinander sind.
- Durch die Natur der Braggreflexion findet man hier mehrere Röntgenspektren überlagert, da es für eine auf den Kristall gestrahlte Wellenlänge mehrere Glanzwinkel gibt.
- Grundsätzlich können die ermittelten Spektren freilich hier auch von spezifischen Charakteristika des verwendeten Detektors (Zählrohr) beeinflusst oder verfälscht werden.

3.2 Gitterkonstante und Netzebenenabstand

Als Netzebene bezeichnet man jede Ebene in einem Kristall, die durch drei Gitterpunkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt werden kann. Entsprechend meint man mit Netzebenenabstand den Abstand zweier benachbarter paralleler Netzebenen. Damit ist klar, dass es je nach Kristallstruktur mehrere verschiedene Netzebenenabstände geben kann.

Als Gitterkonstante bezeichnet man allgemein den Abstand zwischen zwei gleichen Teilchen in x- oder y-Richtung des Kristalls. „Gleiche Teilchen“ heißt hierbei, dass z.B. in einem Salz der Abstand Kation-Kation bzw. Anion-Anion gemeint ist.

Aus obigem wird deutlich, dass der Zusammenhang zwischen der Gitterkonstante a und dem in die Bragg-Bedingung eingehenden Netzebenenabstand d davon abhängt, welche Lage die beugenden Netzebenen im Bezug auf die den Kristall begrenzenden Flächen haben. Im Fall einer Parallelität

gilt in einem Salz vom Typ NaCl z.B. der Zusammenhang $d = \frac{a}{2}$ (vgl. dazu auch die Abb. 15 der Praktikumsanleitung).

3.3 Unterschiede zwischen Röntgen- und Gammastrahlung

Zunächst handelt es sich bei beiden Strahlungsarten um relativ hochenergetische Photonen in nicht-optischen Wellenlängenbereichen. Die Art der Erzeugung differiert jedoch insofern, als die Röntgenstrahlung entweder durch Abbremsung von Elektronen im Anodenmaterial entstehen kann (kontinuierliches Bremsspektrum), oder aber ein an der Anode ankommendes Elektron schlägt ein

Hüllenelektron einer unteren Schale aus einem Atom, was dazu führt, dass ein anderes Elektron in die Lücke springt, wobei die charakteristische Röntgenstrahlung (diskrete Linien) emittiert wird. Die Gammastrahlung dagegen wird dadurch erzeugt, dass Atomkerne sich nach Emission von Alpha- oder Betastrahlung oft in einem angeregten Zustand befinden, und dann so oft in niederenergetischere Zustände fallen, bis sie im Grundzustand ankommen (d.h. normalerweise z.B. ein oder zwei mal). Da die Energien dieser Zustände jedoch diskret sind, findet sich hier nur ein diskretes Linienspektrum an Gammaquanten-Energien, und kein kontinuierlicher Spektralanteil. Zudem unterscheiden sich Röntgen- und Gammastrahlung durch die auftretenden Energien (Röntgen: ca. 100 eV bis über 10^5 eV, Gamma: ca. 10^4 eV bis 10^{19} eV).

3.4 Vergleich der Funktionsweisen: Röntgenröhre vs. Franck-Hertz-Röhre

<u>Kriterium:</u>	<u>Röntgenröhre:</u>	<u>Franck-Hertz-Röhre:</u>
<u>Zweck:</u>	Emission von Röntgenstrahlung (kontinuierliches Bremspektrum plus char. Röntgenstrahlung, abhängig vom Anodenmaterial)	Zeigen von Resonanzabsorption und Resonanzfluoreszenz, sichtbar (diskretes Fluoreszenzspektrum abhängig vom Gasinhalt)
<u>Inhalt:</u>	evakuiert	enthält Na o.Ä. (gasförmig in geheizter Röhre)
<u>Elektroden:</u>	Kathode mit Glühdraht zur Emission von Elektronen, die zur sehr stark positiven Anode (U: einige keV) hin beschleunigt werden	Kathode mit Glühdraht zur Emission von Elektronen, die zum positiv geladenen Gitter (U: größenordnungsmäßig um 10V) hin beschleunigt werden; dahinter befindet sich Anode, die eine ganz leichte neg. Gegenspannung gegenüber dem Gitter führt, um zufällig dorthin fliegende Elektronen abzustoßen
<u>Was wird gemessen?</u>	Röntgenstrahlung	Hauptsächlich interessant: Anodenstrom.
<u>Was passiert mit den Elektronen beim / nach dem Beschleunigen?</u>	Die Elektronen werden beschleunigt und geben im Anodenmaterial ihre Energie ab. Dabei kommt es zur Emission der Röntgenstrahlung. Sie fließen über die Anode ab.	Die Elektronen fliegen durch die Beschleunigung durch das Gitter Richtung Gitter/Anode. Wenn es sich nicht um zufällig herumfliegende, sondern um beschleunigte Ladungen handelt, so schaffen sie es i.A., die Gegenspannung zwischen Gitter und Anode zu überwinden. Sie werden alsdann von einem Strommessgerät als Anodenstrom registriert. Ist die Gitterspannung so hoch, dass die beschl. Elektronen Hüllenelektronen des Gases anregen können, so wird, wenn das Elektron mit einem Gasatom stößt (dies ist kein „Muss“) eine Anregungsenergie (diskrete Möglichkeiten) von einem Hüllenelektron absorbiert und schließlich in einem Lichtquant wieder freigegeben (Resonanzfluoreszenz). Die Elektronen fliegen mit der Restgeschwindigkeit weiter und schaffen es je nach Restenergie noch zur Anode oder sie können sogar noch einmal oder mehrere Male anregen. Entspricht der durch die Beschleunigung auf die Elektr. übertragene Energiebetrag recht genau der Anregungsenergie des Gases, so schaffen es viele Elektronen nach Stößen nicht mehr bis zur Anode. Bei solchen Beschleunigungsspannungen sinkt der Anodenstrom. Was festzuhalten ist: Das Licht wird in der Franck-Hertz-Röhre nicht in der Anode erzeugt, sondern auf dem Weg dorthin.

