

Versuch: Trägheitsmoment (02.12.2002)

Inhalt:

- | | | |
|----|--------------------------|----------|
| 1. | Einführung zum Versuch | Seite 1 |
| 2. | Messungen und Auswertung | Seite 1 |
| 3. | Beantwortung der Fragen | Seite 18 |

1. Einführung zum Versuch

Bei allen Arten von Drehbewegungen fester Körper ist das Trägheitsmoment eine Größe von fundamentaler Bedeutung. Sie soll daher im vorliegenden Versuch eingehender behandelt werden. Aufgabe ist es, zunächst das Trägheitsmoment einer Puppe zu bestimmen, anschließend das eines Menschen. In diesem Zusammenhang soll auch untersucht werden, in wie weit man durch Extrapolation von am Modell (hier: der Puppe) gewonnenen Erkenntnissen Aussagen über das reale Objekt (hier: den Menschen) machen kann und auf welche Weise sich die Übereinstimmung zwischen Modell und Realität steigern lässt.

2. Messungen und Auswertung

2.1 Messung des Trägheitsmoments einer Puppe

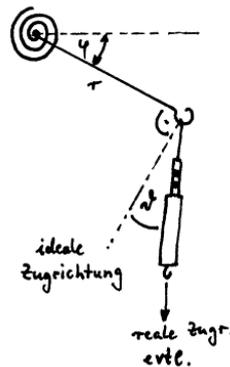
Das Ziel im ersten Versuchsteil ist die Bestimmung des Trägheitsmoments einer Holzpuppe um ihre vertikale Achse¹ in zwei verschiedenen Körperstellungen. Hierzu wird die Puppe auf einer drehbaren Achse befestigt, die im Zentrum einer Spiralfeder fixiert ist (Drehtellernummer: 1). Dieses System ist, wenn es ausgelenkt wird, zu Drehschwingungen fähig. Da diese bei hinreichend kleiner Auslenkung harmonisch sind, kann man aus der Schwingungsperiode bei bekannter Winkelrichtgröße der Feder recht einfach auf das Trägheitsmoment zurückschließen.

Anfänglich ist die Winkelrichtgröße allerdings unbekannt. Deshalb wird sie zunächst mittels eines „statischen“ und eines „dynamischen“ Verfahrens bestimmt:

a) Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Achse der Spiralfeder besitzt eine Einspannvorrichtung, in die ein Metallstab mit Öse so eingespannt wird, dass sein Ende genau über dem Federzentrum liegt (siehe Bild):

¹ Die Achse soll dabei durch den Schwerpunkt gehen.



An der Öse wird über einen Kraftmesser idealerweise tangential gezogen und hiermit die zum rückstellenden Drehmoment proportionale Kraft F für verschiedene Auslenkungen φ bestimmt, woraus wir gleich die Winkelrichtgröße bestimmen werden.

Vor der Messung muss man sich allerdings über eine wichtige Fehlerquelle Gedanken machen: Wird über den Kraftmesser nicht genau tangential und in der Ebene des Stabes gezogen, so trägt nur ein Teil der Zugkraft zum Drehmoment am Stab bei. Hierdurch ergibt sich also ein Fehler in der Kraftmessung, da die gemessene Kraft nicht der real auslenkenden Kraft entspricht. Um übermäßige Messfehler hierdurch zu vermeiden, schätzen wir ab, wie weit wir den Kraftmesser verkippfen dürfen, um einen zusätzlichen Fehler von höchstens 0,5% (das entspricht etwa 50% des aus anderen Quellen kommenden Fehlers von 1% nach Anleitung) durch diese Fehlmessung zu erzeugen:

Sei ϑ der Verkippungswinkel in der Stabebene (siehe Bild); ψ der Verkippungswinkel aus der Ebene. Zieht man nun mit einer Kraft F_{Zug} am Kraftmesser, so ist die zum Drehmoment beitragende Kraftkomponente, wie man sich leicht klarmacht, durch

$$F_{\text{wirk,real}} = F_{\text{Zug}} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \psi$$

gegeben. Nehmen wir nun an, dass die Verkippung in beide Richtungen gleich ist, können wir abschätzen, um welchen Maximalwinkel wir den Kraftmesser gleichzeitig in beide Richtungen verkippfen dürfen:

$$\frac{F_{\text{wirk}}}{F_{\text{zug}}} \geq 0,995 \Leftrightarrow \cos^2 \vartheta \geq 0,995 \Leftrightarrow \vartheta \leq 4,1^\circ$$

Im Rahmen unserer Messungen, auch beim großen Drehteller weiter unten, haben wir uns um die Einhaltung dieser oberen Schranke für die Winkelabweichung bemüht.

Die Eigenschaften der Feder selbst führen außerdem noch zu zwei anderen Fehlerquellen²:

- Die Hysterese der Feder (d.h. die Feder kehrt nach Auslenkung bei Kraftreduktion zu Null nicht mehr ganz zur Nullauslenkung zurück, siehe z.B. Gerthsen) haben wir nicht berücksichtigt, da uns der Betreuer erklärte, dieser Effekt sei vernachlässigbar.
- Bei höheren Auslenkungen kommt es zu Änderungen der Winkelrichtgröße, d.h. Nichtlinearitäten des rückstellenden Drehmoments. Wir nehmen im Folgenden an, dass im Rahmen der in

² Auch diese Quellen werden dann beim großen Drehteller in gleicher Weise wie hier behandelt.

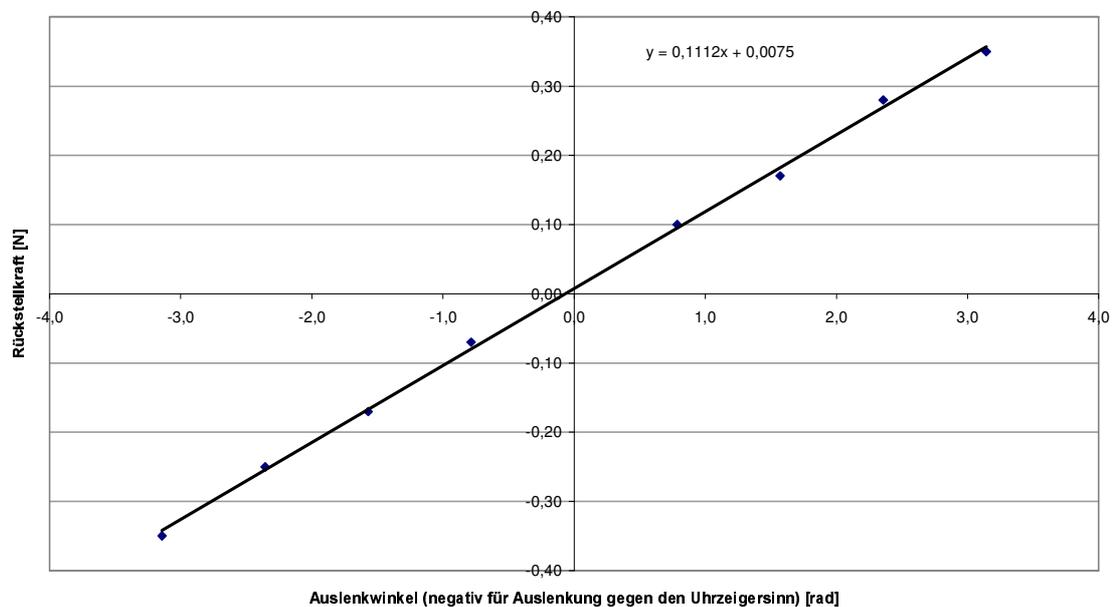
der Anleitung geforderten Messbereiche der Linearitätsbereich in guter Näherung nicht verlassen wird.

Nun aber endlich zur Messung:

Für jeweils vier Auslenkungen wurde in beiden Drehrichtungen die rückstellende Kraft in Abhängigkeit des Auslenkwinkels φ gemessen. Die Schritte für φ sind dabei wie in der Anleitung gefordert gleich 45° . In den folgenden Messtabellen und Diagrammen ist bei Auslenkung im Uhrzeigersinn Kraft sowie Winkel positiv genommen, der Winkelnullpunkt ist bei Nullauslenkung gesetzt. Bei Auslenkung im Gegenuhrzeigersinn wird der Winkel dann negativ, allerdings auch die Kraft, da diese dann in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Es ergeben sich folgende Messwerte und das zugehörige Diagramm:

Winkel [°]	Winkel [rad]	Kraft [N]
-180	-3,14	-0,35
-135	-2,36	-0,25
-90	-1,57	-0,17
-45	-0,79	-0,07
45	0,79	0,10
90	1,57	0,17
135	2,36	0,28
180	3,14	0,35

statische Bestimmung der Winkelrichtgröße (kl. Drillachse)



Offensichtlich liegen keine groben Ausreißer vor.

Mithilfe der exponentiellen Regressionsfunktion unserer Tabellenkalkulation können wir zu diesen Werten die Parameter einer linearen Regression sowie deren **statistische** Fehler berechnen:

Regression:	Steigung	Achsenabschnitt
Wert	0,1112	0,0075
Fehler	0,0015	0,0033

Innerhalb der statistischen Fehlergrenzen geht die Regressionsgerade nicht durch den Nullpunkt; die Abweichung kommt vermutlich dadurch zustande, dass die unterschiedliche Winkelrichtgröße bei Links- und Rechtsdrehung eigentlich eine lineare Regression nicht zulassen würde. Der Sachverhalt ist also ein Hinweis auf die Asymmetrie der Winkelrichtgröße.

Der aus obiger Regression gewonnene Wert für D^* ist gleich der Steigung der Geraden multipliziert mit der Länge des Hebelarms von $19,1 \text{ cm} \pm 0,3 \text{ cm}$:

$$D^* = 0,111 \frac{\text{N}}{\text{rad}} \cdot 0,191 \text{m} = 21,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

Nun berechnen wir den Fehler für D^* . Zunächst sehen wir uns einmal den systematischen Gesamtfehler an. Er entsteht aus folgenden Beiträgen:

Der Winkel φ ist ohne nennenswerten systematischen Fehler (die Fehleichung der Skala ist als vernachlässigbar anzusehen). Die Kraft ist mit der Fehleichung der Federwaage von 1% behaftet; der Fehler für die Stablänge entsteht praktisch ausschließlich durch die Verschiebung des Federwaagenendes in der Öse; er ist statistischer und nicht systematischer Natur. Der Kraftfehler von 1% führt also als einziger systematischer Fehler zu einem Steigungsfehler von eben 1%. Damit ist

$$\Delta D^*_{\text{sys}} = 1\% \cdot 21,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

Nun betrachten wir noch den statistischen Fehler: Er ergibt sich aus dem statistischen Fehler der Geradensteigung (hierdurch sind die statistischen Fehler für Winkel und Kraft bereits mit betrachtet) sowie dem gerade schon angesprochenen statistischen Fehler der Länge des Hebelarms durch quadratische Fortpflanzung mit den entsprechenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \Delta D^*_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial D^*}{\partial m_{\text{Gerade}}} \Delta m_{\text{Gerade}} \right)^2 + \left(\frac{\partial D^*}{\partial r_{\text{Hebel}}} \Delta r_{\text{Hebel}} \right)^2} = \sqrt{(r_{\text{Hebel}} \Delta m_{\text{Gerade}})^2 + (m_{\text{Gerade}} \Delta r_{\text{Hebel}})^2} \\ &= 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \end{aligned}$$

Der Gesamtfehler für D^* ergibt sich schließlich aus linearer Addition dieser beiden Fehler zu:

$$\Delta D^* = 7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

Offensichtlich dominiert der statistische Fehler.

b) Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße

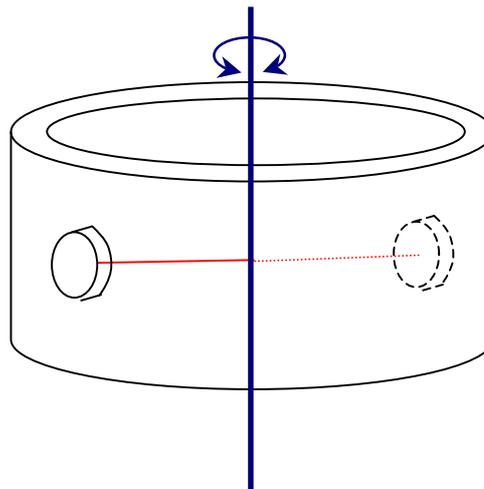
In diesem Versuchsteil soll nochmals ein Wert für D^* bestimmt werden, aber diesmal etwas anders: Wir befestigen statt dem Stab mit Öse einen auf beide Seiten gleich weit hinausreichenden Stab auf dem Federzentrum und schrauben auf beiden Seiten im gleichen Abstand vom Zentrum Gewichte (No. 5) an. Wir messen dann die Schwingungszeit des Systems, und das bei verschiedenen Abständen der Gewichte vom Zentrum. Dann gilt folgende Relation zwischen der Schwingungszeit T , der Winkelrichtgröße D^* und den Trägheitsmomenten I_r , I_z und I_d , die durch die als punktförmig idealisierten Gewichte (I_r), die endliche Ausdehnung der Gewichte (I_z) bzw. die Eigenträgheit des Messsystems (I_d) verursacht sind:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (I_r + I_z + I_D)$$

Zunächst wollen wir die durch die idealisiert punktförmigen Gewichte verursachten Trägheitsmomente³ $I_r = 2 m \langle r \rangle^2$ für die im Versuch verwendeten Abstände $\langle r \rangle$ der Gewichtsmittelpunkte zum Drehzentrum inkl. deren Fehler berechnen:

m = 0,058kg +/- 0,001kg			quadratische Fehlerfortpfl.:
$\langle r \rangle$ [m]	$\Delta \langle r \rangle$ [m]	$I=2m\langle r \rangle^2$ [kgm ²]	ΔI [kgm ²]
0,200	0,001	4,64E-03	6,13E-05
0,140	0,001	2,27E-03	3,79E-05
0,070	0,001	5,68E-04	1,70E-05

Nun wollen wir zeigen, dass I_z im obigen Term für T^2 vernachlässigbar ist. Wir betrachten hierzu zunächst ein Massenstück und nehmen zuerst einmal an, dass es näherungsweise aus einem kreis-scheibenförmigen Ausschnitt einer 1 cm dicken Zylinderschale um den Drehungsmittelpunkt besteht (siehe Zeichnung).



Dann können wir das Massenstück in infinitesimal dünne Massescheibchen dm zerlegen, deren Punkte jeweils alle den gleichen Abstand zum Drehungsmittelpunkt haben. Diese Scheibchen haben in guter Näherung alle den gleichen Durchmesser, nämlich den des Gewichts. Die Massenpunktnäherung von oben ist in diesem Bild für die Gewinnung des Trägheitsmoments äquivalent damit, dass *alle* Scheibchen den gleichen Abstand $\langle r \rangle$ (das ist der des Gewichtsmittelpunkts) zum Drehungsmittelpunkt haben. Nun nehmen wir diese Näherung eben heraus und halten den Abstand zum Drehungsmittelpunkt nur innerhalb der infinitesimalen Massenelemente für konstant. Es ergibt sich aus dem Satz von Steiner (Formel (5) der Anleitung) für das Massenelement dm_i zwischen der Ansiedlung im Radius $\langle r \rangle$ vom Drehpunkt entfernt und der Ansiedlung im wahren Radius $\langle r \rangle + s_i$ entfernt eine Trägheitsmoment-Abweichung von:

$$dI_i = I_{\langle r \rangle + s_i} - I_{\langle r \rangle} = I_s + dm_i \cdot (\langle r \rangle - s_i)^2 - (I_s + dm_i \langle r \rangle^2) = dm_i (s_i^2 - 2 \cdot \langle r \rangle \cdot s_i)$$

³ Für Trägheitsmomente sind zwei Bezeichnungen üblich (I und J). Wir werden im Folgenden immer I schreiben.

mit den Bezeichnungen aus (5).

Es gilt somit für die gesamte erzeugte Trägheitsmomentabweichung bei *zwei* Gewichten:

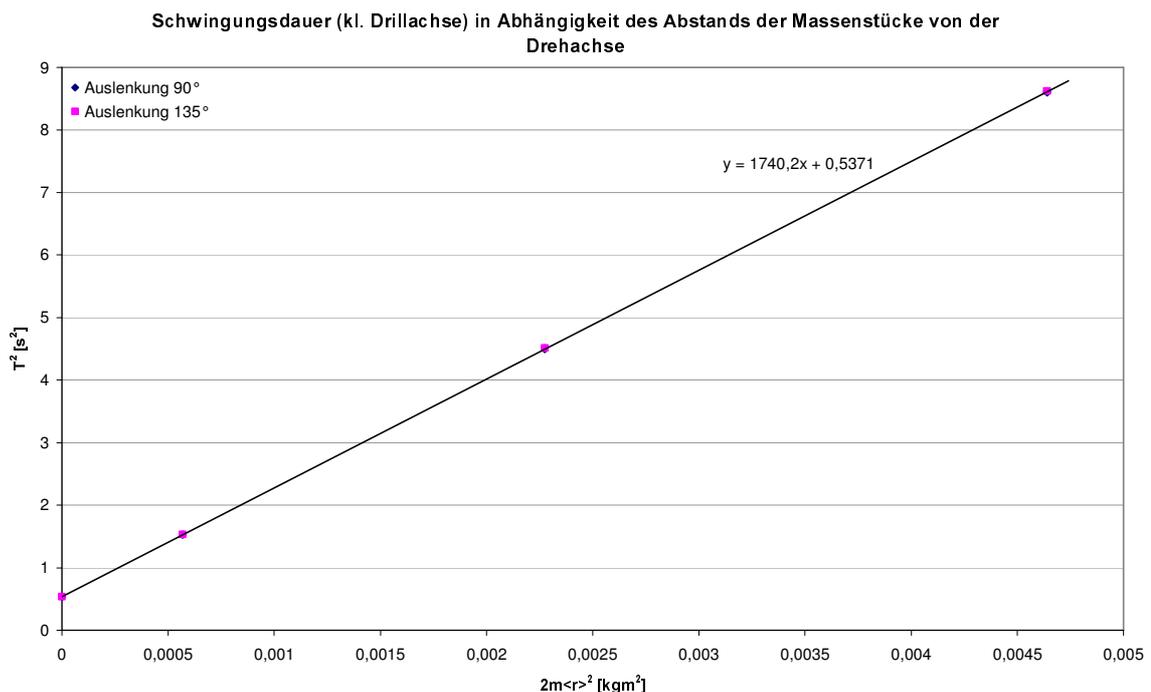
$$\begin{aligned}
 2\Delta I &= 2 \int dI_i = 2 \int (s_i^2 - 2 \langle r \rangle s_i) dm = 2 \int_{-0,005cm}^{0,005cm} (s_i^2 - 2 \langle r \rangle s_i) \frac{dm}{ds_i} ds_i = \\
 &= 2 \int_{-0,005cm}^{0,005cm} (s_i^2 - 2 \langle r \rangle s_i) \frac{m_{Gew}}{1cm} ds_i = 2 \cdot \frac{0,058kg}{0,01m} \cdot \left[\frac{s_i^3}{3} - \langle r \rangle \cdot s_i^2 \right]_{-0,005m}^{0,005m} = \\
 &= 2 \cdot \frac{0,058kg}{0,01m} \cdot 2 \cdot \left(\frac{(0,005m)^3}{3} \right) = 9,7 \cdot 10^{-7} kg \cdot m^2
 \end{aligned}$$

Diese Differenz zwischen dem Trägheitsmoment, das man aus dem Satz von Steiner mit Integration über Massenelemente erhalten würde, und dem Trägheitsmoment aus der Punktmassennäherung, ist von mehrfach kleinerer Größenordnung als die oben berechneten sonstigen Fehler für die Trägheitsmomente, also kann I_z vernachlässigt werden.

Die Beziehung (19) aus der Anleitung vereinfacht sich somit zu:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (I_r + I_D)$$

Wenn wir nun T^2 gegen I_r für die verschiedenen Abstände der Gewichte zum Mittelpunkt auftragen, so erhalten wir eine Gerade mit der Steigung $(4\pi^2 / D^*)$ und dem Achsenabschnitt $[(4\pi^2 / D^*) \cdot I_D]$. In das gleich folgende Diagramm haben wir die T^2 -Werte für 135° und 90° Auslenkung eingetragen und aus allen Werten eine Regressionsgerade gebildet, um I_r sowie I_D zu bestimmen. Die Schwingungszeit-Quadrat-Messwerte für $I_r = 0$ (d.h. ohne Gewichte) haben wir ebenfalls in dieses Diagramm und die Regression einbezogen.



Hier sind noch einmal die genauen Werte für die Steigung und den Achsenabschnitt, die uns die exponentielle Regressionsfunktion des Tabellenkalkulationsprogrammes zurückgibt, und auch gleich noch die Fehlerwerte dazu, die es auch ausrechnet:

Regression	Steigung [s ² /(kg m ²)]	Achs.Abschn. [s ²]
Wert	1,740E+03	5,37E-01
Fehler	2,05E+00	5,33E-03

Die Winkelrichtgröße ist also gleich:

$$D^* = (1 / \text{Steigung}) \cdot 4\pi^2 = 0,0227 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2 = 0,02269 \text{ Nm/rad}$$

Der stat. Steigungsfehler der Regressionsgerade ist bei 0,12%. Ist eine Größe G mit einem gewissen prozentualen Fehler behaftet, so gilt: Der prozentuale Fehler von $1/G$ ist gleich dem prozentualen Fehler von G . Also ist der statistische Fehler für D^* :

$$\Delta D^*_{stat} = 0,12\% \cdot (D^*) = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad}$$

Teilt man den Achsenabschnitt durch die Steigung, so erhält man (s.o.) sofort einen Wert für I_D von $3,09 \cdot 10^{-4}$.

Wir wollen jetzt allerdings noch den Wert für I_D geometrisch bestimmen. Der Teil des Systems, der dieses Trägheitsmoment bestimmt, besteht im wesentlichen aus einem auf dem Federzentrum befestigten Stahlzylinder ($h = 0,05\text{m}$; $r = 0,01\text{m}$; gebohrt, wird aber in Näherung als massiv angenommen) sowie dem dort mittig eingespannten Hilfsstab ($l = 0,40\text{m}$; $r = 0,0015\text{m}$), der die Gewichte trägt.

Es ergibt sich mit der Annahme, die Dichte des Zylinders, den man ja nicht wiegen kann, sei gleich der Dichte des Stabes:

$$I_D = I_{Stab} + I_{Zyl} = \frac{m_{Stab} \cdot l_{Stab}^2}{12} + \rho_{Stab} \frac{r_{Zyl}^4 \pi \cdot h_{Zyl}}{2} = \frac{m_{Stab} \cdot l_{Stab}^2}{12} + \frac{m_{Stab} r_{Zyl}^4 \cdot h_{Zyl}}{r_{Stab}^2 l_{Stab} \cdot 2}$$

Mit $m_{Stab} = 0,022\text{kg}$ ergibt sich:

$$I_D = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Das ist ungefähr derselbe Wert wie der aus der Regressionsgerade.

Nun überlegen wir uns, wie I_D in unseren oben erhaltenen Wert für D^* eingeht. Dazu können wir nur sagen: Der Wert geht überhaupt nicht ein. Denn die Steigung der Regressionsgeraden wird durch einen konstanten Unterschied im Achsenabschnitt überhaupt nicht beeinflusst. Wenn wir also nun den systematischen Fehler für das D^* bestimmen wollen, gehen nur systematische Abweichungen von T oder I_r ein. (Der systematische Fehler für die Steigung ist der systematische Fehler für T^2/I_r .) T ist mit einem systematischen Fehler von 0,03‰ behaftet, $1/T$ folglich mit einem Fehler von ebenfalls 0,03‰ nach der weiter oben schon angestellten Überlegung. Es gilt für den relativen Fehler eines Quadrats einer Größe G :

$$\Delta(Z^2) = \frac{\partial(Z^2)}{\partial Z} \Delta Z = 2Z \cdot \Delta Z \Leftrightarrow \frac{\Delta(Z^2)}{Z^2} = 2 \frac{\Delta Z}{Z}$$

Ergo ist $(1/T^2)$ mit einem systematischen Fehler von 0,06%o behaftet. Der prozentuale systematische Fehler für I_r wird nur durch den systematischen Fehler in der Massenbestimmung für die Gewichte verursacht, ist also gleich dem prozentualen Fehler, den der Hersteller der Waage angibt, d.h. 0,1%. Ergibt sich ein Wert (d.h. konkret hier: D^*) bis auf einen konstanten Vorfaktor aus einem Produkt von Messgrößen, d.h. hier der Größen $(1/T^2)$ und I_r , erhält man den prozentualen systematischen Fehler für den Wert durch einfache Addition der prozentualen systematischen Fehler der Messgrößen. Der systematische Fehler für D^* ergibt sich also zu:

$$\Delta D^*_{\text{sys}} = 0,1\% \cdot (D^*) = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad.}$$

Das heißt, der syst. Fehler für T wäre von vornherein vernachlässigbar gewesen.

Schlussendlich erhalten wir durch lineare Addition des stat. und syst. Fehlers den Gesamtfehler für D^* zu:

$$\Delta D^* = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad.}$$

Der statistische und systematische Fehler sind also ungefähr gleich.

c) Vergleich zwischen statischem und dynamischem D^*

Das statische D^* war: $D^*_{\text{statisch}} = (2,12 \cdot 10^{-2} \pm 7 \cdot 10^{-4}) \text{ Nm/rad}$

Das dynamische D^* im Vergleich dazu: $D^*_{\text{dyn}} = (2,27 \cdot 10^{-2} \pm 5 \cdot 10^{-5}) \text{ Nm/rad}$

Man sieht also, dass die Werte im Rahmen des Fehlergrenzen leider nicht übereinstimmen. Wir führen ein paar Vermutungen an, warum dies so sein könnte:

- Evtl. wurde der ein oder andere Fehler des Messaufbaus etwas zu optimistisch eingeschätzt.
- Der Berechnung der statistischen Fehler für die Steigungen liegt zugrunde, dass der stat. Fehler nach normalen Konventionen als einfache Standardabweichung anzugeben ist; das Konfidenzniveau ist allerdings dann auch nur 68,3%. Wenn allerdings fast 100% einer Messwertmenge in den Fehlerbereich fallen sollen, dann ist zweifache Standardabweichung als Fehler zu nehmen, wodurch sich der gesamte Fehler für das statische D^* auf $10 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/rad}$ erhöhen würde. Der Fehler für das dynamische D^* wäre aber auch nach einer solchen Anpassung noch sehr niedrig.
- Der Fehler für das dynamische D^* erscheint also unglaublich klein. Wir vermuten, dass die Werte für T^2 nur zufällig so sehr genau auf einer Geraden liegen und das die für die Regressionsgeraden-Steigung berechnete Standardabweichung unrealistisch niedrig macht.

d) Berechnung des Trägheitsmoments der Puppe

In diesem Auswertungsteil möchten wir das Trägheitsmoment einer ca. 30 cm hohen Holzpuppe (Nr. 5) mit angelegten sowie vom Körper weggestreckten Armen (Beine jeweils nahe zusammen) bestimmen. Hierzu wird die Puppe mittels eines Hilfsstabs zentral über dem Federzentrum befestigt; der Zylinder über dem Federzentrum enthält hierfür neben der seitlichen Bohrung auch ein vertikales Bohrloch. Wenn die Puppe nun zum Schwingen gebracht wird, kann man aus dem gerade berechneten dynamischen D^* sowie der Schwingungszeit und I_D und dem Trägheitsmoment des Hilfsstabs I_H das Trägheitsmoment I_P der Puppe bestimmen:

$$[\text{Anleitung}] (16) \Rightarrow I_p = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot D^* - I_D - I_H$$

$$\text{mit Quader - Thm. } I_H = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12} = \frac{0,045 \text{ kg} \cdot 2 \cdot (0,005 \text{ m})^2}{12} = 1,875 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Die zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wichtigen Daten stehen in der gleich folgenden Tabelle. I_D erhalten wir dabei aus der geometrischen Bestimmung (s.o.), als Fehler für diesen Wert setzen wir die Differenz zwischen dem geometrisch bestimmten I_D und dem I_D aus dem Achsenabschnitt an. Man sieht dann, dass man I_H überhaupt nicht in die Rechnung miteinbeziehen muss, da es um mehrere Größenordnungen kleiner ist als der Fehler für I_D . Das sind die erhaltenen Werte:

$D^* = (2,27 \cdot 10^{-2} \pm 5 \cdot 10^{-5}) \text{ Nm/rad}$				
stat. Fehler jeweils $\Delta T = \pm 0,002 \text{ s}$				
$I_D = (3,0 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-5}) \text{ kg m}^2$				
1. Stellung	T [s]	$(D^*)T^2/4\pi^2$ [kg m²]	$I_p=(D^*)T^2/4\pi^2-I_D-I_H$ [kg m²]	ΔI_p [kg m²]
Ausl. 90°	0,827	3,9E-04	9,3E-05	1,3E-05
Ausl. 135°	0,835	4,0E-04	1,0E-04	1,3E-05
Durchschn.			9,7E-05	1,3E-05
2. Stellung	T [s]	$(D^*)T^2/4\pi^2$ [kg m²]	$I_p=(D^*)T^2/4\pi^2-I_D-I_H$ [kg m²]	ΔI_p [kg m²]
Ausl. 90°	1,022	6,0E-04	3,0E-04	1,4E-05
Ausl. 135°	1,028	6,1E-04	3,1E-04	1,4E-05
Durchschn.			3,0E-04	1,4E-05

Es ergibt sich also:

$$I_{p, \text{ angelegt}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$I_{p, \text{ gestreckt}} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Erstaunlicherweise ist das Trägheitsmoment mit ausgestreckten Armen **3 mal** so groß wie mit angelegten Armen.

Auch die Fehlerrechnung ist in der Tabelle schon erledigt. Wie macht man das? Zunächst sehen wir uns die Fehler für die vier Einzelwerte von I_p an. Da der Fehler für D^* „zur Hälfte“ systematischer Art ist, pflanzen wir linear fort und erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta I_{p, \text{ Einzelwert}} &= \left| \frac{\partial I_{p, \text{ Einzel}}}{\partial D^*} \Delta D^* \right| + \left| \frac{\partial I_{p, \text{ Einzel}}}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial I_{p, \text{ Einzel}}}{\partial I_D} \Delta I_D \right| = \\ &= \left| \frac{T^2}{4\pi^2} \Delta D^* \right| + \left| \frac{2TD^*}{4\pi^2} \Delta T \right| + \left| -\Delta I_D \right| \end{aligned}$$

Den Fehler für den Durchschnitt ist (lineare Fehlerfortpflanzung) dann jeweils der Durchschnitt der Fehler.

Wir erhalten:

$$\Delta I_{p, \text{ angelegt}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\Delta I_{P, gestreckt} = 1 * 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Aber halt! Diese Fehler enthalten ja noch nicht die Abweichung, die durch eine falsche Aufhängung der Puppe (d.h. Drehachse geht nicht exakt durch den Schwerpunkt) entsteht. Wir sehen uns dieses Problem auch an. Es gilt nach Satz von Steiner, wenn die Drehachse aus dem Schwerpunkt verrückt wird, für den entstehenden Fehler des Trägheitsmomentes:

$$\Delta I_{verrückt} = m \cdot (\Delta r)^2$$

Nehmen wir eine Verrückung von 0,001m an, so ist

$$\Delta I_{verrückt} = 0,182\text{kg} * (0,001\text{m})^2 = 1,82 * 10^{-7} \text{ kg m}^2.$$

Wir können den Fehler durch die Verrückung auf jeden Fall vernachlässigen, solange er kleiner als $1 * 10^{-6} \text{ kg m}^2$ ist, d.h. wenn man nachrechnet, dass die Verrückung 2,3mm nicht überschreiten darf. Da der Metallstab fest in ein Bohrloch in der Puppe einzustecken war, nehmen wir an, dass diese Grenze im Versuch nicht überschritten wurde.

2.2 Messung des Trägheitsmoments eines Menschen

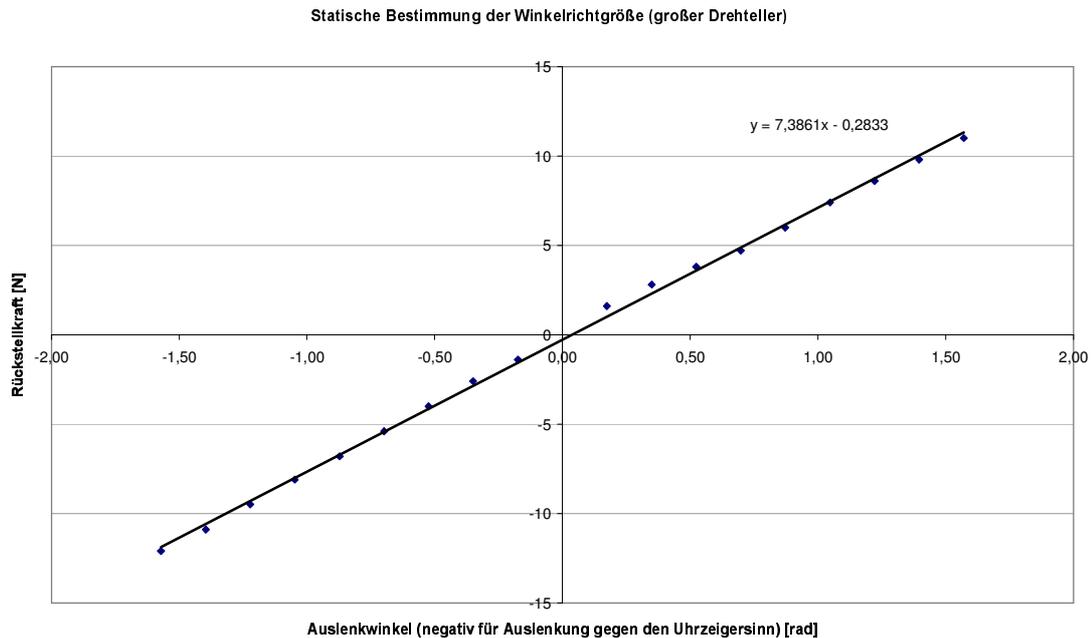
a) Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Statt einer Spiralfeder mit einem angebauten Metallzylinder erfolgen die nächsten Messungen mithilfe einer Spiralfeder mit zentral befestigtem Metallteller darüber; wir wollen zu diesem System, das zusätzlich noch mit einer Haltestange auf dem Drehteller ausgestattet ist, von nun an „Drehteller-System“ sagen. Als erstes bestimmen wir wieder die Winkelrichtgröße mithilfe der statischen Methode. Das Experiment verläuft analog 2.1.a), wir wollen hier daher die Betrachtungen über die Fehlerquellen etc. nicht noch einmal anführen, und nur kurz auf markante Unterschiede eingehen.

Der Teller wurde zunächst mittels einer hier deutlich stärkeren Federwaage (Messbereich bis 20N) ausgelenkt, es ist aber wichtig zu wissen, dass das Ende der Federwaage hier in einem Schraubloch fixiert wird und daher der Radius des Hebelarms praktisch nicht variiert. Auch ist der Messfehler für diesen Radius so gering, dass wir eine spezielle Betrachtung dieses Fehlers völlig unterlassen können. Wir haben hier die Kraft für deutlich mehr Winkelauslenkungs-Werte bestimmt (10°-Schritte), jedoch ist die Höchstauslenkung bei 90°.

Nun aber wieder zu den Messwerten und dem Diagramm:

Winkel [°]	Winkel [rad]	Kraft [N]
-90	-1,57	-12,1
-80	-1,40	-10,9
-70	-1,22	-9,5
-60	-1,05	-8,1
-50	-0,87	-6,8
-40	-0,70	-5,4
-30	-0,52	-4
-20	-0,35	-2,6
-10	-0,17	-1,4
10	0,17	1,6
20	0,35	2,8
30	0,52	3,8
40	0,70	4,7
50	0,87	6
60	1,05	7,4
70	1,22	8,6
80	1,40	9,8
90	1,57	11



Auch hier haben wir es nicht mit groben Ausreißern zu tun. Wir erhalten als Regressionsparameter:

Regression:	Steigung	Achsenabschnitt
Wert	7,386	-0,283
Fehler	0,066	0,064

Auch hier geht die Gerade im Rahmen des Fehlers nicht durch den Nullpunkt. Laut Anleitung spielt (neben Nichtlinearitäten, die die Regression wieder eigentlich verbieten) bei diesem Drehteller-System die Hysterese wohl doch eine Rolle. Dies zeigt sich darin, dass der Achsenabschnitt deutlich negativ ist, d.h. es wurde, nachdem zuerst im Versuch die Werte für Rechtsdrehung gemessen wurden, ein linksdrehendes Drehmoment benötigt, um den Drehteller wieder in die Nullauslenkung zu bringen. Das ist im Einklang mit Hysteresekurven, wie sie z.B. im Gerthsen für Federn zu finden sind.

In der Anleitung ist auch noch gefordert, zu erklären, wodurch die Nichtlinearität in einer Auslenkrichtung verursacht wird. Leider können wir dafür keine Erklärung finden, weil es nicht etwa so wäre, dass eine gedachte Kurve durch die Wertepunkte mit wachsendem Auslenkwinkel kontinuierlich abflacht oder steiler wird. Würde die Kurve dagegen zu höheren Werten hin abflachen, so könnte man dies dadurch erklären, dass die Messergebnisse für die Haltekraft durch Reibung in der Feder kleiner werden (das rücktreibende Drehmoment wird in diesem Fall durch die Addition aus Drehmoment durch Reibung und durch die Federwaage kompensiert; man misst folglich an der Federwaage kleinere Werte, weil die Reibungskraft „dazuhilft“, den Teller in der ausgelenkten Position zu halten)⁴. Stattdessen schwankt die Steigung der gedachten Messwertkurve jedoch.

Die gewonnenen Werte erlauben uns wieder, mithilfe des Hebelarms von 0,29m das statische D^* zu berechnen:

⁴ hierzu siehe auch Bearbeitung der Frage 1

$$D^* = 7,39 \frac{N}{rad} \cdot 0,29m = 2,14 \frac{Nm}{rad}$$

Der systematische Fehler wird auch hier wieder allein vom Skalierungsfehler der Federwaage gebildet. Da dieser wieder 1% beträgt, erhalten wir:

$$\Delta D^*_{\text{sys}} = 1\% \cdot 2,1 \frac{Nm}{rad} = 0,02 \frac{Nm}{rad}$$

Da der Hebelarm hier als fehlerfrei angenommen wird, ist der statistische Fehler für D^* hier sehr leicht zu berechnen:

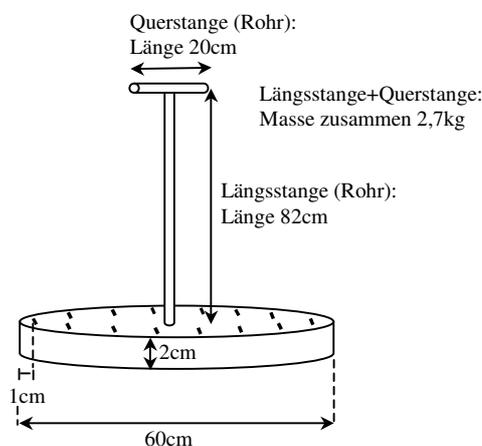
$$\Delta D^*_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{\partial D^*}{\partial m_{\text{Gerade}}} \Delta m_{\text{Gerade}} \right)^2} = r_{\text{Hebel}} \Delta m_{\text{Gerade}} = 0,02 \frac{Nm}{rad}$$

Der statistische und der systematische Fehler sind etwa gleich, es ergibt sich (lin. Addition) ein Gesamtfehler von:

$$\Delta D^* = 0,04 \text{ Nm/rad}$$

b) Eigenträgheitsmoment des Drehteller-Systems:

Das Drehtellersystem sieht folgendermaßen aus:



Das Trägheitsmoment berechnet sich nun aus:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{\text{Teller (Zylinder)}} + I_{\text{Längsst. (Hohlzyl.)}} + I_{\text{Querst. (dünner Stab)}} = \\ &= \rho_{\text{Alu}} \cdot (r_{\text{Teller}}^2 \pi h_{\text{Teller}}) \cdot \frac{r_{\text{Teller}}^2}{2} + \frac{m_{\text{Längsst.+Querst.}} \cdot l_{\text{Längsst.}}}{l_{\text{Längsst.}} + l_{\text{Querst.}}} \cdot r_{\text{Längsst.}}^2 + \frac{m_{\text{Längsst.+Querst.}} \cdot l_{\text{Querst.}}}{l_{\text{Längsst.}} + l_{\text{Querst.}}} \cdot \frac{l_{\text{Querst.}}^2}{12} \end{aligned}$$

Man erhält für I_{Teller} (mit $\rho_{\text{Alu}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) einen Wert von $0,69 \text{ kg m}^2$ und sieht dann, dass $I_{\text{Längsst.}}$ vernachlässigt werden kann, da sich für dieses Trägheitsmoment mit $r_{\text{Längsst.}} < 4\text{cm}$ ein Wert von der Größenordnung 10^{-3} kg m^2 ergibt; gleiches gilt für $I_{\text{Querst.}}$. Der Fehler durch das Weglassen bewegt sich im Rahmen des impliziten Fehlers. Es folgt:

$$I_0 = 0,69 \text{ kg m}^2$$

c) Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße

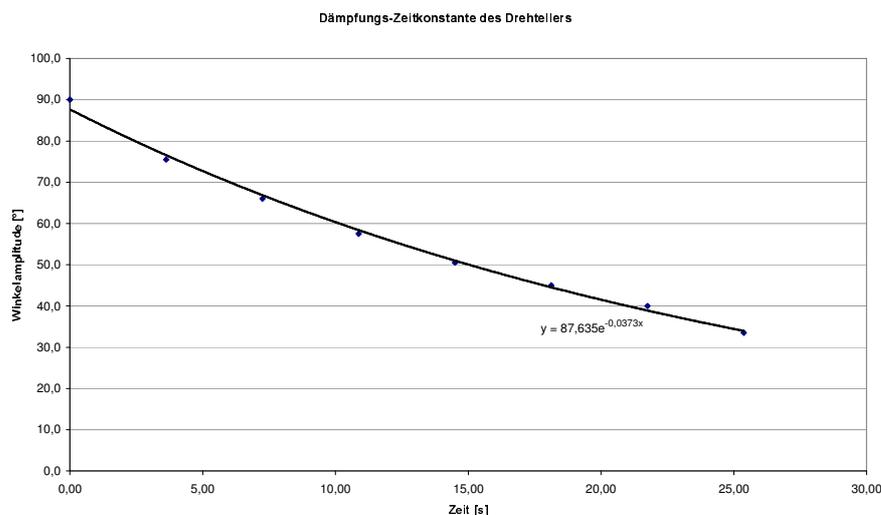
Hier gehen wir jetzt etwas anders vor als beim kleinen Teller. Zunächst soll die Dämpfungs-Zeitkonstante des Drehtellers bestimmt werden; hierzu wurde der Drehteller zunächst um 90° nach rechts ausgelenkt⁵ und dann einerseits über 7 Schwingungen hinweg die aktuelle Amplitude in 1-periodigen Schritten aufgeschrieben, andererseits die Schwingungszeit für 7 Schwingungen gemessen, um die Periodendauer zu erhalten⁶. Das ist nötig, damit man den Amplitudenwerten Zeitwerte zuordnen kann. Dann kann man ein Diagramm „Amplitude über fortschreitende Zeit“ erstellen und mittels exponentieller Regression die Dämpfungskonstante ermitteln.

Erst einmal die Berechnung des Wertes für die Schwingungszeit:

Schwingungszeit für 7 Perioden:		
4 Werte: Jeweils 2 Messungen für rechtsdrehende und linksdrehende Anfangsauslenkung		
Wert Nr.	7*T [s]	T [s]
1	26,40	3,77
2	26,10	3,73
3	24,50	3,50
4	24,50	3,50
Ø	25,38	3,63

Der Durchschnittswert für T liegt dann der Umrechnung Schwingungsanzahl – verstrichene Zeit in den folgenden Diagrammen zugrunde. Werfen wir einen Blick auf die Ergebnisse:

Winkelamplitude in Abhängigkeit von der Zeit:		
Perioden	Zeit [s]	Winkelamplitude [°]
0	0,00	90,0
1	3,63	75,5
2	7,25	66,0
3	10,88	57,5
4	14,50	50,5
5	18,13	45,0
6	21,75	40,0
7	25,38	33,5



⁵ Eine Messung der Amplituden für Anfangsauslenkung nach links erbrachte dasselbe Ergebnis, wird also im Folgenden nicht weiter verwendet.

⁶ Es wird angenommen, dass die Dauer für eine Schwingung innerhalb der Messzeit konstant blieb.

Den Dämpfungsfaktor bestimmen wir sofort aus der exponentiellen Regression zu

$$\delta = 0,037 / \text{sec.}$$

Dieser Wert bedeutet, dass innerhalb einer Zeit von $(1/0,037)\text{s} = 27\text{s}$ die Amplitude auf $(1/e)$ mal Anfangsamplitude abklingt.

Die Kreisfrequenz ω der Schwingung des gedämpften Systems unterscheidet sich von der Frequenz ohne Dämpfung ω_0 folgendermaßen

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Mit dem oben erhaltenen Wert für $\omega = 2\pi/T = 1,7 \text{ rad/s}$ wird allerdings klar, dass der δ^2 -Term vernachlässigbar ist, und damit im Folgenden $\omega = \omega_0$ bzw. $T = T_0$ angenommen werden kann.

Es gilt also trotz Dämpfung:

$$D^* = \frac{4\pi^2 I_0}{T^2} = 2,1 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \text{ (ähnlich Gleichung (19) d. Anleitung.)}$$

Eine Fehlerrechnung macht hier keinen Sinn, weil für I_0 keine durchgeführt werden sollte.

d) Dynamische Bestimmung des Trägheitsmoments des Menschen

Das, was unter 2.1 schließlich mit der Puppe gemacht wurde, sollte hier mit einem echten Menschen ausprobiert werden: Die dynamische Bestimmung des Trägheitsmomentes mit angelegten bzw. ausgestreckten Armen. Dazu stellte sich eine Versuchsperson (Stephan Hachinger) auf den Drehteller und es wurde je dreimal die 6-fache Schwingungszeit⁷ in den beiden Haltungen gemessen. Die Versuchsperson stellte sich jedes mal neu auf den Teller; wie eine Betrachtung am Ende dieses Teils zeigt, ist nämlich der Fehler, der in diesem Versuchsteil durch einen „falschen Stand“ der Versuchsperson auf dem Drehteller verursacht wird (d.h. die Person steht nicht genau mit dem Schwerpunkt über der Drehachse), recht groß.

Wir berechnen nun zunächst aus den Messwerten die mittleren Schwingungsdauern:

Arme angelegt:		
Messwert Nr.	6T [s]	T [s]
1	33,2	5,53
2	33,2	5,53
3	33,4	5,57
∅		5,54
Arme ausgestreckt:		
Messwert Nr.	6T [s]	T [s]
1	42,0	7,00
2	41,4	6,90
3	41,5	6,92
∅		6,94

Die Winkelrichtgröße zur Bestimmung der Trägheitsmomente soll aus der statischen Bestimmung genommen werden, also:

⁷ Laut Anleitung sollte die Zeit über 7-10 Schwingungen gemessen werden, dies war allerdings aufgrund der Dämpfung unmöglich.

$$D^* = 2,14 \text{ Nm/rad} \pm 0,04 \text{ Nm/rad}$$

Wir berechnen nun die Trägheitsmomente mittels folgender Formel (die analog (19) aufgebaut ist):

$$I_M = \frac{D^* \cdot (\bar{T})^2}{4\pi^2} - I_0$$

(mit $I_0 = 0,69 \text{ kg m}^2$)

Es ergibt sich:

$$I_{M, \text{angelegt}} = 0,97 \text{ kg m}^2$$

$$I_{M, \text{ausgestreckt}} = 1,92 \text{ kg m}^2$$

Eine weitere Fehlerrechnung wird hier nicht durchgeführt, da der Fehler für I_0 unbekannt ist.

Hier ist das Verhältnis der Trägheitsmomente ausgestreckt zu angelegt gleich 2,0.

Nun betrachten wir, wie schon erwähnt, was passiert, wenn die Person falsch auf dem Teller steht. Wenn wir eine Abweichung des Standpunktes vom idealen Punkt von 1cm annehmen, so ergibt sich (nach Satz von Steiner) eine Verfälschung von I_M von:

$$\Delta I_{M, \text{verrück}=1\text{cm}} = m \cdot (\Delta r)^2 \stackrel{m_{SH}=66\text{kg}}{=} 0,007 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Das scheint noch nicht viel, wenn wir aber eine realistischere Verrückung von ca. 7 cm annehmen, so ist der Fehler bereits bei:

$$\Delta I_{M, \text{verrück}} = 0,32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Das sind immerhin 33% bzw. 17% der erhaltenen Werte für $I_{M, \text{angelegt}}$ bzw $I_{M, \text{ausgestreckt}}$. Die erhaltenen Werte sind also nicht besonders sicher.

2.3 Vergleich der Trägheitsmomente

Im letzten Praktikumsteil soll nun aus verschiedenen geometrischen Modellen heraus das Trägheitsmoment des Menschen abgeschätzt und mit dem Ergebnis der Messungen verglichen werden.

a) **Idealisierung als Zylinder über Länge und Masse**

Die einfachste Näherung ist, den Menschen als einen Zylinder anzunähern. Dabei wollen wir zuerst annehmen, dass der Zylinder die gleiche Höhe, Masse und Dichte hat, wie die anzunähernde Person. Der Radius des Zylinders ergibt sich dann aus der Beziehung

$$m = \rho \pi r^2 h$$

Mit dem Trägheitsmoment eines Kreiszyinders $I = \frac{mr^2}{2}$ folgt die gewünschte Beziehung mit den gegebenen Größen:

$$I_{\text{Kreiszyinder, Höhe}} = \frac{m^2}{2h\pi\rho}$$

Verwenden wir nun die mittlere Dichte eines Menschen $\rho \approx 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sowie die von uns bestimmten Daten der Versuchsperson, nämlich

$$m=66\text{kg}$$
$$h=1,75\text{m}$$

so ergibt sich als Wert für das Trägheitsmoment

$$I_{\text{Kreiszyinder, Höhe}} \approx 0,40\text{kgm}^2.$$

b) Idealisierung als Zylinder über Durchmesser und Masse

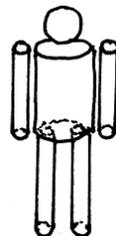
Alternativ zu der unter a) gemachten Annahme eines Zylinders, der in Höhe, Masse und Dichte mit dem Menschen übereinstimmt, wollen wir nun einen Zylinder betrachten, bei dem statt der Höhe der Durchmesser bzw. der Radius mit dem des Menschen übereinstimmt. Zu diesem Zweck haben wir den Hüftumfang $U=88\text{cm}$ der Person gemessen, woraus sich unter der Annahme der Körper sei ein Kreiszyinder sofort der Radius dieses Zylinders über $r = \frac{U}{2\pi}$ ergibt. Somit folgt für das Trägheitsmoment dieses Zylinders

$$I_{\text{Kreiszyinder, Radius}} = \frac{m}{2}r^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{U}{2\pi}\right)^2 \approx 0,65\text{kgm}^2.$$

Man beachte, dass dieser Wert um mehr als 60% größer ist als der in a) berechnete!

c) Abschätzung über die Einzelträgheitsmomente

Natürlich ist die Betrachtung eines Menschen als Zylinder relativ grob. Wir wollen daher im folgenden noch eine etwas genauere Abschätzung durchführen, bei der wir den Menschen gemäß folgender Abbildung als aus Kreiszyindern und einer Kugel zusammengesetzt ansehen.



Wir verwenden dabei die in Tabelle 1 der Anleitung gegebenen prozentualen Anteile der einzelnen Körperteile an der Gesamtmasse (wobei wir Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß sowie Oberarm, Unterarm und Hand jeweils zusammengefasst haben):

Körperteil	Massenanteil [%]	Masse [kg]
Kopf	7,3	4,8
Rumpf	48,9	32,3
Arm	5,2	3,4
Bein	16,7	11,0

Die Trägheitsmomente ergeben sich daraus wie folgt:

- Für den Kopf verwenden wir direkt das in der Anleitung gegebene Trägheitsmoment einer Kugel: $I_{Kopf} = \frac{2}{5} m_{Kopf} (r_{Kopf})^2$. Mit dem von uns bestimmten $r_{Kopf}=9,4\text{cm}$ (ergibt sich aus dem Kopfumfang $U_{Kopf}=59\text{cm}$) und obiger Masse ist

$$I_{Kopf} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2.$$

- Der Rumpf ist ein Kreiszyylinder mit der in obiger Tabelle angegebenen Masse und dem Umfang $U=88\text{cm}$ (Hüftumfang der Person). Somit ergibt sich als Trägheitsmoment

$$I_{Rumpf} = \frac{mr^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{U}{2\pi} \right)^2 \approx 0,32 \text{kgm}^2.$$

- Die Arme sind ebenfalls Kreiszyylinder mit einem Umfang von $U_{Arm}=27\text{cm}$ (mittlerer Armumfang der Versuchsperson). Sie rotieren allerdings um eine Achse, die parallel zu ihrer Längsachse ist, aber die nicht durch den Schwerpunkt geht. Den Abstand zwischen Schwerpunktsachse und „Armachse“ bestimmten wir zu $a_{Arm}=20\text{cm}$. Somit ergibt sich nach dem Satz von Steiner ein Trägheitsmoment für jeden Arm von

$$I_{Arm} = \frac{m_{Arm}}{2} \left(\frac{U_{Arm}}{2\pi} \right)^2 + m_{Arm} (a_{Arm})^2 \approx 0,14 \text{kgm}^2.$$

- Analog zu den Armen behandeln wir die Beine: Der mittlere Beinumfang wurde von uns zu $U_{Bein}=40\text{cm}$ gemessen, der Abstand der „Beinmittellachse“ von der Schwerpunktsachse beträgt etwa $a_{Bein}=11\text{cm}$. Damit ergibt sich wieder nach dem Satz von Steiner

$$I_{Bein} = \frac{m_{Bein}}{2} \left(\frac{U_{Bein}}{2\pi} \right)^2 + m_{Bein} (a_{Bein})^2 \approx 0,16 \text{kgm}^2.$$

Mit diesen Einzelträgheitsmomenten können wir nun das des gesamten Menschen zusammensetzen. Arm und Bein sind dabei selbstverständlich zweimal zu rechnen:

$$I_{aus\ Einzelr.} = I_{Kopf} + I_{Rumpf} + 2 \cdot I_{Arm} + 2 \cdot I_{Bein} \approx 0,93 \text{kgm}^2$$

d) Extrapolation der Puppdaten

Ein anderer Ansatz zur Bestimmung des Trägheitsmoments der Versuchsperson besteht darin, die an der Puppe gewonnenen Daten zu extrapolieren, indem man die Abmessungen und Massen von Puppe und Mensch vergleicht und daraus auf das Verhältnis der Trägheitsmomente zurückrechnet. In der Anleitung zum Versuch wird gezeigt, dass unter der Annahme, dass alle Abmessungen

des Menschen sich zu denen der Puppe so verhalten wie die jeweiligen Körpergrößen sowie dass die Massen aller Körperteile jeweils im Verhältnis der Gesamtmassen von Mensch und Puppe stehen, folgende Beziehung zwischen Masse M und Größe L des Menschen sowie der Masse m und der Größe l der Puppe gilt:

$$I_{Mensch} = \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{L}{l} \right)^2 \cdot I_{Puppe}$$

Mit dem in Abschnitt 2.1 d) gewonnenen Trägheitsmoment der Puppe von $I_{Puppe} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$ sowie $M=66\text{kg}$, $m=0,182\text{kg}$, $L=1,75\text{m}$ und $l=31,2\text{cm}$ ergibt sich

$$I_{extrapoliert} \approx 1,1\text{kgm}^2.$$

e) Vergleich: Rechnung – Experiment

Abschließend wollen wir nun noch einmal die errechneten Werte für das Trägheitsmoment unserer Versuchsperson zusammenfassen und mit dem Messwert aus Abschnitt 2.2 d) vergleichen:

Quelle des Wertes	Trägheitsmoment
Zylinder (Länge und Masse)	$I_{\text{Kreiszyylinder, Höhe}} \approx 0,40\text{kgm}^2$
Zylinder (Durchmesser und Masse)	$I_{\text{Kreiszyylinder, Radius}} \approx 0,65\text{kgm}^2$
Einzelträgheitsmomente	$I_{\text{aus Einzeltr.}} \approx 0,93\text{kgm}^2$
Extrapolation der Puppensdaten	$I_{\text{extrapoliert}} \approx 1,1\text{kgm}^2$
Messung (angelegte Arme)	$I_{\text{Mess}} \approx 0,97\text{kgm}^2$

Man erkennt, dass die beiden einfachsten Näherungen (Mensch als Zylinder) erwartungsgemäß die schlechtesten Werte für das Trägheitsmoment (Referenz ist der gemessene Wert) liefern. Ein Vergleich der ersten beiden Zeilen in obiger Tabelle macht offensichtlich, dass die Versuchsperson aber deutlich besser angenähert wird, wenn man den Durchmesser und nicht die Länge des Zylinders als Maß verwendet (wenngleich die Näherung auch dann nur sehr grob sein kann). Dies entspricht auch unseren Erwartungen, denn in das Trägheitsmoment eines Zylinders (bzgl. seiner Längsachse) geht ja die Zylinderhöhe nicht ein, sondern nur der Radius. Damit ist klar, dass der Zylinder, dessen Umfang mit dem des Menschen übereinstimmt (d.h. der „mittlere Radius“ von Mensch und Zylinder sind gleich) den Menschen besser modelliert, als der, bei dem die Höhen übereinstimmen und der Radius nur indirekt über Masse und Dichte folgt und somit i.a. sicherlich weniger genau dem „Radius des Menschen“ (d.h. dem mittleren Radius) entspricht. Die beiden aufwändigeren Betrachtungen (über die Einzelträgheitsmomente sowie über die Extrapolation der Puppensdaten) liefern hingegen in etwa gleich gute Abschätzungen für das Trägheitsmoment.

3. Beantwortung der Fragen

3.1 Nichtlinearitäten der Rückstellkraft in Spiralfedern

Je nach Größe der Auslenkung kann es bei Spiralfedern dazu kommen, dass sich die Windungen berühren. Dies wird v.a. dann der Fall sein, wenn die Auslenkung so erfolgt, dass sich die Feder in Richtung des Mittelpunktes zusammenzieht. Im Falle einer Berührung treten radiale Kräfte zwischen den Windungen (Normalkräfte) auf. Aufgrund dieser Normalkräfte kommt es dann zu tangentialen Reibungskräften zwischen den Windungen. Diese tangentialen Kräfte werden dabei dazu führen, dass die Bewegung der Feder in beiden Richtungen, d.h. sowohl zu kleineren als auch zu noch größeren Auslenkungen hin, gehemmt ist, solange die Berührung anhält. Dieser Effekt ist auch von der Geschwindigkeit der Federbewegung abhängig: bewegen sich die berührenden Windungen schneller gegeneinander, so nimmt der Einfluss der dissipativen Kräfte zu. Dadurch erklären sich Nichtlinearitäten im Verlauf der Rückstellkraft.

3.2 Trägheitsmoment eines Menschen, Modellvorstellungen

Wir wollen im folgenden das Trägheitsmoment eines Menschen (Masse m , Körpergröße h , homogen verteilte Dichte ρ) vergleichen, wenn wir ihn vereinfacht einmal als Kreiszyylinder und einmal als elliptischen Zylinder betrachten.

Beim Kreiszyylinder gilt:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot r^2 \pi \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot h}$$

Somit folgt für das Trägheitsmoment:

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{mr^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\rho \pi h}$$

Analog ergibt sich im Fall eines elliptischen Kreiszyinders:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi a b h \stackrel{a=2b}{=} \frac{1}{2} \pi \rho h \cdot a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{2m}{\rho \cdot \pi \cdot h}$$

Daraus errechnet man das Trägheitsmoment wie folgt:

$$I_{\text{Ellipse}} = \frac{1}{4} \cdot m \cdot (a^2 + b^2) \stackrel{a=2b}{=} \frac{5}{16} m \cdot a^2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{m^2}{\rho \cdot \pi \cdot h}$$

Insgesamt folgt aus obigem schließlich die Beziehung

$$I_{\text{Ellipse}} = \frac{5}{4} \cdot I_{\text{Kreis}}$$

Das elliptische Trägheitsmoment ist also um 25% größer als das des Kreiszyinders.

3.3 Rotation eines Stabes

Zu Beginn der Überlegung sollte man sich vor Augen führen, dass sich der Gesamtdrehimpuls eines Körpers in einzelne Komponenten bezüglich der Achsen eines gewählten (hier: kartesischen) Koordinatensystems zerlegen lässt (Superpositionsprinzip). Diese Komponenten können dann unabhängig voneinander betrachtet werden.

Nehmen wir nun an, wir hätten zwei identische Stäbe (d.h. insbesondere ihre Masse und ihr Trägheitsmoment sind gleich). Stab A soll um seine Längsachse (oBdA sei dies die x-Achse des gewählten Koordinatensystems) rotieren, Stab B um dessen Querachse (dies sei z.B. die y-Achse). Die beiden Stäbe sollen jetzt elastisch gegeneinander stoßen.

Erinnern wir uns nun daran, dass es für lineare Bewegungen bei einem vollständig elastischen Stoß (d.h. Impuls und Energie sind erhalten) z.B. zwischen zwei identischen Billardkugeln (von denen eine anfänglich ruht) zu einem Energieübertrag von 100% kommt, d.h. wenn Kugel A auf die zunächst ruhende Kugel B trifft, so übernimmt Kugel B die gesamte Energie bzw. den gesamten Impuls und Kugel A befindet sich nach dem Stoß in Ruhe.

Ein analoges Verhalten findet sich auch bei unseren beiden Stäben. Dabei betrachten wir die beiden Drehimpulskomponenten in x- und y-Richtung getrennt. Stab A übergibt beim Stoß seinen gesamten Drehimpuls in Richtung der x-Achse an Stab B, denn letzterer befindet sich bzgl. dieser Achse anfänglich sozusagen in Ruhe, d.h. seine Drehimpulskomponente in dieser Richtung ist Null. Umgekehrt aber hat Stab A anfänglich bzgl. der y-Achse den Drehimpuls Null und übernimmt daher den gesamten Drehimpuls in dieser Richtung von Stab B. Das bedeutet: es ist möglich, einen elastischen Stoß derart zu konstruieren, dass ein Stab (Stab A), welcher anfänglich in seiner Längsrichtung rotiert, nach dem Stoß eine Rotation um seine Querachse ausführt. Für Stab B tritt genau der umgekehrte Fall ein, seine anfängliche Rotation um die Querachse wird zu einer Drehung um die Längsachse.

3.4 Rotationsachse und Geschwindigkeit einer Drehbewegung

Bei konstantem Drehimpuls $L = I \cdot \omega$ wird die Winkelgeschwindigkeit ω maximal, wenn das Trägheitsmoment I ein Minimum erreicht. Die Rotationsachse bei der dies der Fall ist, verläuft nach dem Satz von Steiner gerade durch den Schwerpunkt des Körpers.

3.5 Hängeschaukel

a) **Energieformen**

Bei einer solchen Schaukel treten potentielle Energie (im Gravitationsfeld der Erde) sowie kinetische Energie (in Form von Rotationsenergie der Drehbewegung um die Stange) auf.

b) **Drehimpuls**

Der Drehimpuls $L = mr^2\omega$ (wobei r der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse und ω die Winkelgeschwindigkeit ist) ist, ist maximal, wenn die Winkelgeschwindigkeit und damit auch die tangentielle Geschwindigkeit $v = r \cdot \omega$ maximal ist, da wir zunächst annehmen wollen, dass r konstant bleibt (zur parametrischen Anregung durch Verlagerung des Schwerpunktes siehe Fragenteil e). Dies ist der Fall, wenn die Schaukel gerade den tiefsten Punkt der Bewegung erreicht hat, wenn also die potentielle Energie des Systems minimal ist. Entsprechend ergibt sich ein minimaler Drehimpuls (nämlich $L=0$) in den Umkehrpunkten, denn dort ist $v=0$ und das System besitzt nur potentielle Energie.

c) **Trägheitsmomentänderung beim Absenken des Oberkörpers**

Wenn der Schaukelnde seinen Oberkörper absenkt, vergrößert sich der Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. Folglich nimmt das Trägheitsmoment zu.

d) **Energieänderung beim Absenken des Oberkörpers**

Betrachtet man die Änderung der Energie des Gesamtsystems Schaukel-Mensch (unter Berücksichtigung auch der chemischen Energie im Menschen) so ist diese Änderung natürlich gleich

Null, denn es wird ja durch das Absenken des Oberkörpers keinerlei Energie von außen zugeführt oder nach außen abgegeben. Der hier weitaus interessantere Fall, nämlich dass die chemische Energie des Menschen nicht mit in die Betrachtung einfließt, wird in Fragenteil e) behandelt.

e) Parametrische Resonanz

Der Schaukelnde kann dem System Energie zuführen, indem er periodisch die Lage seines Oberkörpers ändert, und zwar nach folgender Regel: In den (oder zumindest in der Nähe der) Umkehrpunkte(n) richtet die Person ihren Oberkörper auf und senkt ihn dann in der Nähe des Nulldurchgangs wieder ab. Der Schwerpunkt des Körpers ist also im untersten Punkt am weitesten von der Drehachse entfernt, in den Umkehrpunkten ist der Abstand minimal.

Machen wir uns nun klar, warum auf diese Weise eine Energieerhöhung des Systems erzielt wird. Dabei ist zunächst zu bemerken, dass wir nun (im Gegensatz zu Aufgabenteil d) die chemische Energie im Menschen nicht mehr in das System mit einbeziehen. Daher kann dem System durch Muskelarbeit Energie zugeführt werden (Energie gilt in den folgenden Betrachtungen als dem System entzogen auch dann, wenn der Schaukelnde durch Muskelarbeit Energie zurückgewinnt). Vergleichen wir nun die (Muskel-)Arbeit, die der Schaukelnde für das Aufrichten bzw. Absenken seines Oberkörpers verrichten muss. Dabei vereinfachen wir die Situation etwas, indem wir annehmen, dass die Lageänderungen sozusagen instantan in den Umkehrpunkten und im Nulldurchgang stattfinden (in der Praxis benötigt man dafür freilich eine gewisse Zeit und legt dabei dann auch einen tangentialen Weg zurück, aber dies hat auf unsere Argumentation keinen grundlegenden Einfluss).

Um sich also im Umkehrpunkt aufzurichten und damit den Radius der Drehbewegung (also den Abstand des Schwerpunktes von der Achse) um eine Strecke Δx zu verringern, muss entgegen der Gravitationskraft Arbeit verrichtet werden. Bei kleinen Auslenkwinkeln der Schaukel kann man näherungsweise annehmen, dass die vom Menschen aufzuwendende Kraft gerade die Schwerkraft ist (Kleinwinkelnäherung). Somit ist für den Aufrichtvorgang eine Arbeit $W_1 = mg\Delta x$ zu verrichten, die gemäß obiger Erläuterung als dem System entzogen zu betrachten ist (der Mensch gewinnt potentielle Energie).

Im Nullpunkt wird nun der Schwerpunkt wieder um eine Strecke Δx von der Drehachse entfernt, die Bewegung erfolgt also diesmal in Richtung der Gravitationskraft. Wäre dies die einzig wirkende Kraft, würde der Mensch hier genau die Energie verlieren und damit dem System zuführen, die er beim Aufrichten gewonnen hat, und insgesamt könnte dem System auf diese Weise keine Energie zugeführt werden. Tatsächlich aber wirkt auf den (jetzt im Gegensatz zu dem Umkehrpunkten kreisförmig bewegten und damit auch beschleunigten) Menschen noch die Zentrifugalkraft. Obwohl es sich dabei lediglich um eine Scheinkraft im beschleunigten Bezugssystem des Schaukelnden handelt, so ist sie für ihn doch real und daher in die Betrachtung der verrichteten Arbeit einzubeziehen. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω und einem Bahnradius r ist die Zentrifugalkraft gegeben durch $F_z = mr\omega^2$. Damit verrichtet der Schaukelnde beim Absenken seines Körpers eine Arbeit

$$W_2 = -(F_g + F_z) \cdot \Delta x = -(mg\Delta x + mr\omega^2\Delta x)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Mensch den entsprechenden Energiebetrag verliert. Er ist also, wie oben erklärt, als dem System zugeführt zu betrachten.

Kommen wir nun zur Energiebilanz des Vorgangs. Aus dem Vergleich von W_1 und W_2 erkennt man sofort, dass dem System insgesamt eine Energie von $\Delta E = mr\omega^2\Delta x$ zugeführt wurde. Da das Aufrichten und Absenken des Körpers zweimal pro Schwingungsperiode erfolgt, ist es möglich, dem System in jeder Periode einen Energiebetrag von $2\Delta E$ zuzuführen.

f) Zeitliches Verhalten von maximalem Drehimpuls und Drehwinkel

In Fragenteil e) wurde gezeigt, dass der dem System durch periodisches Verändern der Oberkörperlage zugeführte Energiebetrag pro Periode proportional zu ω^2 ist. Die Energie der Drehbewegung ist aber ebenfalls proportional zu ω^2 , und zwar gilt $E = \frac{1}{2} I \omega^2$ (wobei der Wert für ω im Nulldurchgang einzusetzen ist, denn dort hat das System ja nur kinetische Energie). Damit ist klar, dass durch obige parametrische Anregung die Energie des Systems (zumindest anfänglich, siehe Erläuterung unten) exponentiell anwächst, denn es ist $\Delta E \sim E$. In den Umkehrpunkten ist diese Energie ausschließlich in Form von potentieller Energie vorhanden, d.h. auch die maximal erreichte Höhe wächst exponentiell an, der maximale Drehwinkel verhält sich entsprechend. Da für den Zusammenhang zwischen maximaler Energie und maximalem Drehimpuls $E = \frac{L^2}{2I}$ gilt, zeigt auch der maximale Drehimpuls eine exponentielle Zunahme. Dies alles gilt, solange der Winkel so klein bleibt, dass obige Überlegungen noch anwendbar sind; bei größeren Winkeln ist die Kleinwinkelnäherung aus e) nicht mehr zulässig und die Zunahme der Höhe verlangsamt sich bzw. endet schließlich ganz.